Jurnal Pembelajaran dan Pengembangan Matematika (PEMANTIK)
Vol. 4 No. 1 (1 Maret 2024) ISSN: 2797-9547

CHAOS GAME DENGAN VARIASI KOMBINASI LINIER TITIK PEMBANGKIT

Kosala D. Purnomo[1], Yurike Devita[2], Firdaus Ubaidillah[3], Bagus Juliyanto[4]

[1,2,3,4] Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember
Email: *kosala.fmipa@unej.ac.id*

ABSTRACT

This research aims to obtain fractal objects by modifying the chaos game. Initially the generating point in a chaos game is determined by the midpoint between the generating point of the previous iteration and the vertex point of a randomly selected triangle. In a sufficiently large number of iterations, by determining the generating points according to this formula, a set of generating points will be obtained which are shaped similar to the Sierpinski triangle. In this research, the coordinates of the generating point are determined from a linear combination between the coordinates of the initial generating point and the triangle vertex. Linear combination is carried out by varying the coefficient parameters of the coordinate variables of the generating point and the vertex point. The results of the research show that chaos games will form various fractal objects if the sum of the coordinate coefficient parameters of the two points is in the interval -1 to 1. In particular, if the sum of coefficient parameters is close to 1, it will produce a fractal object similar to the Sierpinski triangle. In general, sum of coefficient parameters that are away from this interval will result in the fractal properties of the set of generating points increasingly disappearing.

Keywords*: Fractals; chaos game; Sierpinski triangle*

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan objek fraktal dengan cara memodifikasi *chaos game*. Awalnya titik pembangkit dalam *chaos game* ditentukan oleh titik tengah antara titik pembangkit iterasi sebelumnya dengan titik verteks segitiga yang dipilih secara acak. Pada iterasi yang cukup besar, dengan penentuan titik pembangkit seperti rumusan ini, akan diperoleh sekumpulan titik pembangkit yang berbentuk mirip dengan segitiga Sierpinski. Dalam penelitian ini koordinat titik pembangkit ditentukan dari kombinasi linier antara koordinat titik pembangkit awal dan titik verteks segitiga. Kombinasi linier dilakukan dengan menvariasikan parameter koefisien variabel koordinat titik pembangkit dan titik verteksnya. Hasil penelitian menunjukkan bahwa chaos game akan membentuk berbagai objek fraktal jika jumlah parameter koefisien koordinat kedua titik tersebut yang berada dalam interval -1 sampai dengan 1. Secara khusus, untuk jumlah parameter koefisien mendekati 1 akan menghasilkan objek fraktal mirip segitiga Sierpinski. Secara umum, jumlah parameter koefisien yang menjauhi interval tersebut akan mengakibatkan sifat fraktal dari kumpulan titik pembangkit tersebut akan semakin hilang.

Kata Kunci: Fraktal; chaos game; segitiga Sierpinski

PENDAHULUAN

Kajian tentang fraktal dewasa ini berkembang cukup pesat, baik dalam tataran teori/analisis, geometri, maupun penerapannya. Dalam bidang teori atau analisis konsep tentang keserupaan diri (*self similarity*) sebenarkan ide tentang fraktal sudah muncul saat ditemukannya himpunan Cantor oleh George Cantor pada 1883. Idenya adalah satu interval dibagi tiga bagian lalu bagian tengah dihilangkan dan kemudian pada iterasi berikutnya dua interval yang tersisa masing-masing dibagi tiga lagi lalu bagian tengahnya dihilangkan. Secara geometri ide ini sangat sederhana. Namun demikian, dalam tataran analisis perumusannya cukup rumit. Secara analisis, pendekatan konsep keserupaan diri dalam fraktal dapat dilakukan dengan teori himpunan, tranformasi Affine, L-Systems, maupun aturan penulisan dengan kaidah tertentu (Pratiwi, Purnomo, & Ubaidillah, 2018). Konsep dimensi fraktal juga termasuk dalam kajian analitik dalam fraktal. Dalam tataran geometri, objek fraktal yang dikembangkan sangat bervariasi. Ide dalam himpunan Cantor dengan objek interval yang dibagi menjadi tiga bagian serta bagian tengah dihilangkan kemudian berkembang menjadi bagian tengah berubah menjadi kurva tertentu. Dalam hal ini fraktal Koch snowflake maupun Koch anti-snowflake dikembangkan dari pemikiran seperti ini (Alkhori, Purnomo, & Julianto, 2019). Demikian juga, dikembangkan satu objek segitiga dibagi empat bagian lalu bagian yang tengah dihilangkan (fraktal segitiga Sierpinski), maupun objek persegi yang dibagi menjadi beberapa bagian lalu bagian yang tersisa dibagi lagi dengan cara serupa, yaitu fraktal karpet Sierpinski atau debu Cantor (Devaney, 2003). Saat ini beberapa konsep fraktal juga telah banyak diterapkan. Bermacam variasi desain arsitektur berdasarkan geometri fraktal telah dikembang (Hasang & Supardjo, 2012). Demikian juga, berbagai objek fraktal telah dimanfaatkan untuk memperoleh desain batik fraktal yang artistik (Purnomo, Pramestika, & Kamsyakawuni, 2020) serta desain kain tenun (Ngilawajan, 2015). Berkaitan dengan teori dalam *chaos game* dalam fraktal juga telah digunakan sebagai alat bantu untuk mengidentifikasi karakteristik iris mata seseorang (Jampour et al, 2012).

Bentuk geometri segitiga Sierpinski dapat dibangkitkan dengan beberapa cara. Dengan transformasi Affine, yaitu dilatasi dan translasi, sebuah segitiga dilakukan dilatasi dengan faktor setengah lalu diduplikasi dan ditranslasi ke dua titik sudut lainnya. Jika proses ini dilakukan berulang-ulang, maka akan didapatkan segitiga Sierpinski. Demikian juga, dengan menggunakan suatu aksioma dan aturan produksi tertentu, melalui rumusan dalam L-Systems dapat diperoleh segitiga Sierpinski. Objek fraktal segitiga Sierpinski atau mirip dengan segitiga Sierpinski juga dapat diperoleh melalui permainan *chaos game*. Di dalam *chaos game* diberikan tiga titik verteks yang membentuk segitiga sama sisi (atau bisa juga segitiga sembarang) dan sebuah titik pembangkit awal di dalam segitiga tersebut. Kemudian ditentukan titik pembangkit baru yang didefinisikan sebagai titik tengah antara titik pembangkit awal dengan salah satu titik verteks segitiga yang dipilih secara acak. Jika proses seperti ini dilakukan sampai ribuan iterasi, maka kumpulan titik-titik pembangkit ini akan membentuk objek fraktal yang mirip dengan segitiga Sierpinski (Purnomo, Armana, & Kusno, 2016).

Dalam perkembangannya terdapat berbagai macam modifikasi dari *chaos game*. Modifikasi tersebut meliputi penambahan jumlah titik verteks yang dipilih secara acak dari tiga buah menjadi empat, lima, sampai *n* buah titik verteks yang membentuk poligon konveks dan non-konveks. Modifikasi lainnya adalah berkaitan dengan aturan pemilihan titik verteksnya. Sebagai contoh, titik yang sudah terpilih dalam suatu iterasi tidak dapat dipilih pada iterasi berikutnya, tidak dapat memilih titik yang berada di sebelah kiri atau kanannya, dan berbagai aturan pemilihan lainnya (Afifa dkk, 2020). Modifikasi lainnya dalam *chaos game* adalah dengan menambahkan rotasi (Purnomo dkk, 2019) atau rasio kompresi (Purnomo, Dewi, & Julianto, 2019) pada titik pembangkit baru. Kesemua modifikasi *chaos game* tersebut dapat menghasilkan berbagai variasi objek fraktal yang berbeda.

Pendefinisian titik pembangkit baru sebagai titik tengah dari titik pembangkit awal dan salah satu titik verteks segitiga (atau secara umum poligon segi *n*) pada hakikatnya adalah menyatakan titik pembangkit baru sebagai kombinasi linier dari titik pembangkit awal dan salah satu titik verteks segitiga. Dalam hal ini konstanta koefisien dalam kombinasi linier tersebut untuk kedua titiknya adalah setengah. Aturan *chaos game* seperti ini membentuk objek fraktal yang mirip dengan segitiga Sierpinski. Di dalam penelitian ini akan dikaji bagaimana objek fraktal yag terbentuk dari *chaos game* dengan konstanta koefisien dalam kombinasi linier yang bernilai bukan setengah dalam membentuk titik pembangkit baru.

METODE PENELITIAN

Di dalam penelitian ini chaos game yang dikaji adalah tiga titik verteks. Titik pembangkit awal (x_A, y_A) diberikan secara acak di dalam segitiga yang dibentuk tiga verteks tersebut. Kemudian dipilih secara acak salah satu dari tiga titik verteks tersebut, misalnya terpilih (x_V, y_V). Titik pembangkit baru (x_B, y_B) ditentukan dengan menggunakan rumus kombinasi linier dari (x_A, y_A) dan (x_V, y_V), yaitu:

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} x_V \\ y_V \end{pmatrix} \qquad (1)$$

yang mana a adalah konstanta koefisien titik pembangkit awal dan b adalah parameter/konstanta koefisien titik verteks yang terpilih secara acak. Semua koordinat titik pembangkit baru akan digambarkan dalam 5.000 iterasi. Jika dalam *chaos game* awal berlaku $a = b = 0{,}5$ (sehingga $a + b = 1$), maka dalam penelitian ini digunakan

$$a + b = k. \qquad (2)$$

Dalam hal ini nilai *a* ditentukan terlebih dahulu secara acak pada interval [0,1] di awal iterasi, lalu ketika variasi nilai *k* diberikan barulah nilai *b* dihitung. Nilai *k* akan divariasikan pada interval tertentu untuk mendapatkan objek fraktal yang terbentuk. Dalam hal ini nilai k yang akan divariasikan dibagi dalam empat interval, yaitu:

a. $k > 1$
b. $0 < k \leq 1$
c. $-1 \leq k < 0$
d. $k < -1$

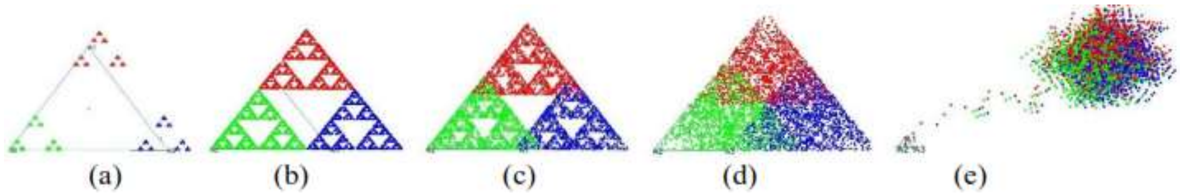
Pada masing-masing interval tersebut simulasi hasil *chaos game* akan dilakukan untuk nilai $a < b$, $a = b$, dan $a > b$. Tentu saja, untuk kasus $k = 0$ tidak menarik dibahas karena akan berimplikasi $a = b = 0$ dan *chaos game* akan menghasilkan titik (0,0) pada iterasi berapapun.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Hasil visualisasi titik pembangkit dalam simulasi ini menggunakan tiga warna yang berbeda (merah, hijau, dan biru) bergantung pada pemilihan titik verteks pada setiap iterasi. Secara umum pada jumlah iterasi yang besar titik verteks yang dipilih akan terdistribusi sama pada masing-masing titik verteks tersebut. Oleh karena itu, ketiga warna tersebut akan terdistribusi pada ketiga titik verteks segitiga secara merata.

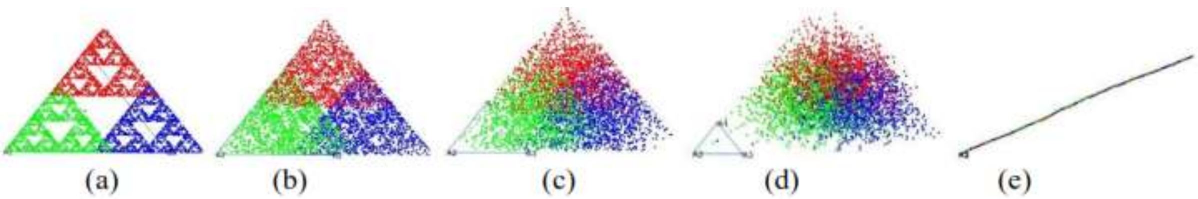
1. Hasil Chaos Game untuk $k > 1$

Untuk $k > 1$ dan $a < b$, diperoleh hasil simulasi sebagaimana dinyatakan pada Gambar 1. Pada gambar ini simulasi dilakukan pada nilai $k = 1{,}1; 1{,}3; 1{,}5; 1{,}7; 2$ dan pada masing-masing nilai k ini secara berurutan diperoleh hasil sesuai Gambar 1(a) sampai dengan 1(e).



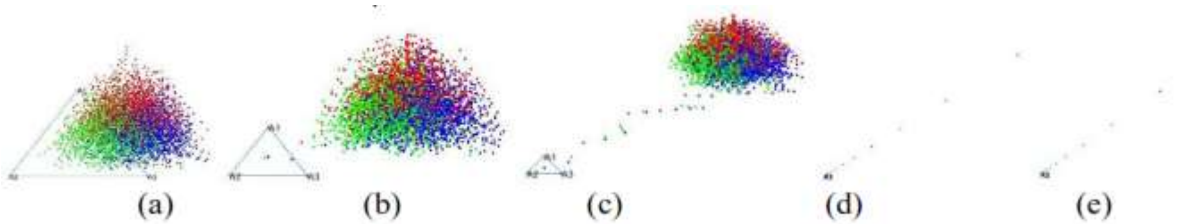
Gambar 1. Hasil Chaos Game untuk $k > 1$ dan $a < b$

Untuk $k > 1$ dan $a = b$, diperoleh hasil simulasi sebagaimana dinyatakan pada Gambar 2. Pada gambar tersebut simulasi dilakukan pada variasi nilai k yang sama, yaitu $k = 1{,}1; 1{,}3; 1{,}5; 1{,}7; 2$ dan diperoleh hasil sesuai urutan Gambar 2(a) sampai dengan 2(e).



Gambar 2. Hasil Chaos Game untuk $k > 1$ dan $a = b$

Untuk $k > 1$ dan $a > b$, diperoleh hasil simulasi sebagaimana pada Gambar 3. Pada gambar ini simulasi dilakukan pada nilai $k = 1{,}1; 1{,}3; 1{,}5; 1{,}7; 2$ dan diperoleh hasil secara berurutan Gambar 3(a) sampai dengan 3(e).

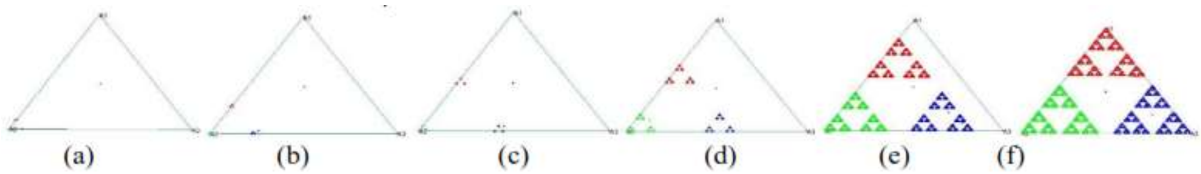


Gambar 3. Hasil Chaos Game untuk $k > 1$ dan $a > b$

Dari Gambar 1, Gambar 2, dan Gambar 3 terlihat bahwa hasil *chaos game* semakin kehilangan sifat fraktalnya pada saat nilai *k* membesar menjauhi 1. Sebaliknya, untuk *k* yang cukup dekat ke nilai 1 sifat fraktalnya semakin nampak. Untuk hasil Gambar 3 pemilihan nilai $k = 1{,}1$ nampaknya terlalu besar sehingga sifat fraktalnya tetap belum terlihat sehingga harus diambil nilai *k* yang lebih kecil lagi mendekati 1.

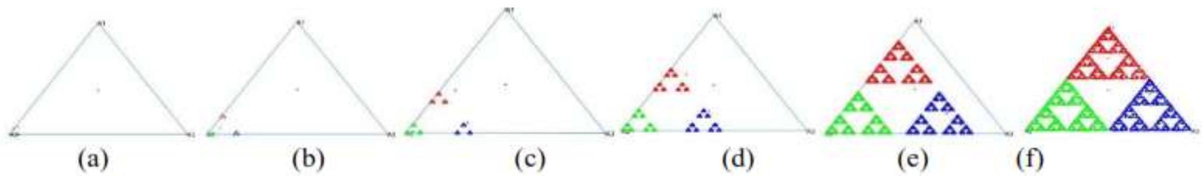
2. Hasil Chaos Game untuk $0 < k \leq 1$

Untuk $0 < k \leq 1$ dan $a < b$, diperoleh hasil simulasi sebagaimana dinyatakan pada Gambar 4. Pada gambar ini simulasi dilakukan dengan nilai $k = 0{,}1; 0{,}3; 0{,}5; 0{,}7; 0{,}9; 1$ dan pada masing-masing nilai k ini secara berurutan diperoleh hasil sesuai urutan Gambar 4(a) sampai dengan 4(f).



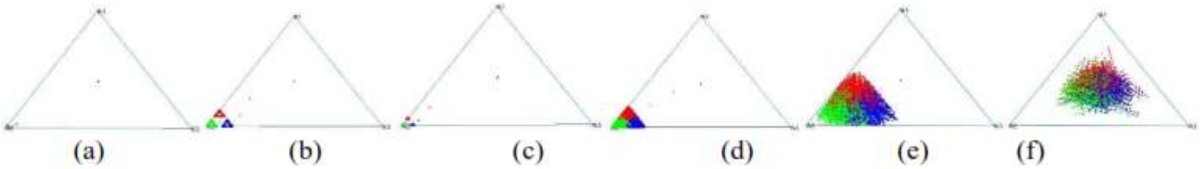
Gambar 4. Hasil Chaos Game untuk $0 < k \leq 1$ dan $a < b$

Untuk $0 < k \leq 1$ dan $a = b$, diperoleh hasil simulasi sebagaimana dinyatakan pada Gambar 5. Pada gambar ini simulasi dilakukan dengan nilai $k = 0{,}1; 0{,}3; 0{,}5; 0{,}7; 0{,}9; 1$ dan pada masing-masing nilai k ini secara berurutan diperoleh hasil sesuai urutan Gambar 5(a) sampai dengan 5(f).



Gambar 5. Hasil Chaos Game untuk $0 < k \leq 1$ dan $a = b$

Untuk $0 < k \leq 1$ dan $a > b$, diperoleh hasil simulasi sebagaimana dinyatakan pada Gambar 6. Pada gambar ini simulasi dilakukan dengan nilai $k = 0{,}1; 0{,}3; 0{,}5; 0{,}7; 0{,}9; 1$ dan pada masing-masing nilai k ini secara berurutan diperoleh hasil sesuai urutan Gambar 6(a) sampai dengan 6(f).

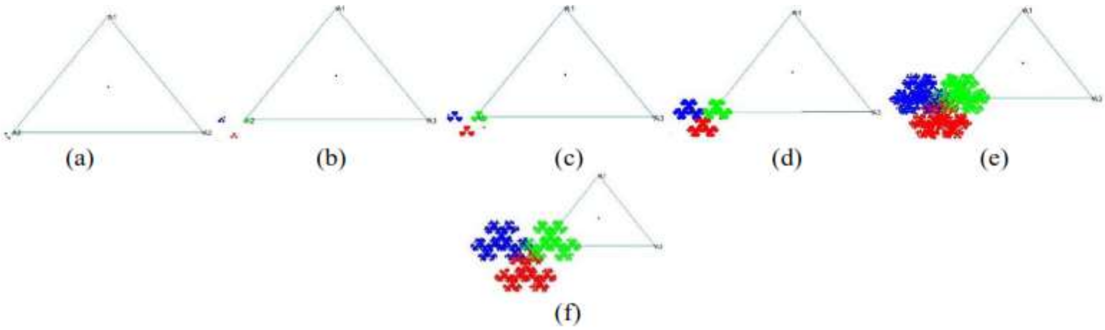


Gambar 6. Hasil Chaos Game untuk $0 < k \leq 1$ dan $a > b$

Dari Gambar 4, Gambar 5, dan Gambar 6 terlihat bahwa secara umum hasil *chaos game* memunculkan sifat fraktal untuk $a < b$ dan $a = b$ pada interval $0 < k \leq 1$. Sifat fraktalnya semakin terlihat saat nilai k mendekati 1. Secara khusus, untuk $a = b$ dan $k = 1$ (yaitu Gambar 5(f)), *chaos game* menghasilkan fraktal segitiga Sierpinski. Ini adalah kasus untuk masalah chaos game orisinil. Namun demikian, untuk kasus $a > b$ (Gambar 6) sifat fraktal hasil chaos game hanya nampak untuk nilai k yang dekat dengan 0 (atau sampai dengan $k = 0{,}5$). Hal ini dapat dijelaskan bahwa karena $a > b$ dan a adalah koefisien komponen titik pembangkit, maka posisi titik pembangkit yang digambarkan di setiap iterasi akan berkumpul di sekitar titik pembangkit sebelumnya di dalam segitiga. Sedangkan untuk kasus $a < b$ dan b adalah koefisien komponen titik verteks segitiga, maka posisi titik pembangkit yang digambarkan di setiap iterasi akan berkumpul di sekitar titik verteks terpilih dalam segitiga. Akibatnya, dalam kasus ini kumpulan titik pembangkit akan tersebar merata dan tertarik oleh masing-masing titik verteks tersebut sehingga akan memunculkan sifat fraktal.

3. Hasil Chaos Game untuk $-1 \leq k < 0$

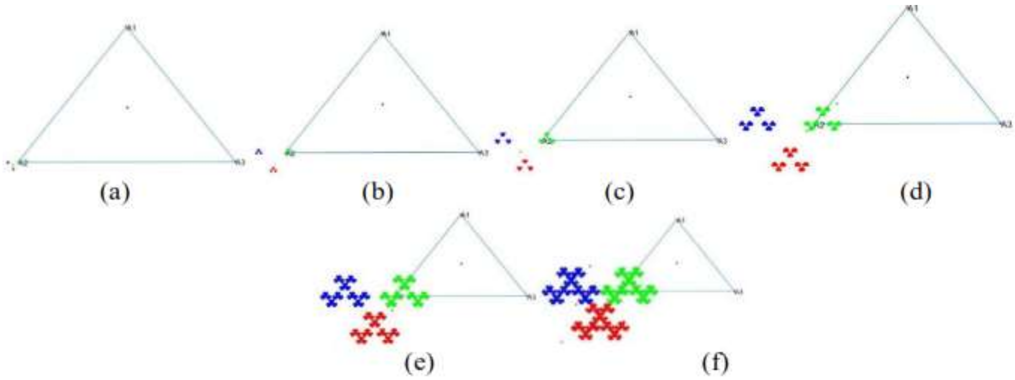
Untuk $-1 \leq k < 0$ dan $a < b$, diperoleh hasil simulasi sebagaimana dinyatakan pada Gambar 7. Pada gambar ini simulasi *chaos game* dilakukan dengan mengambil nilai $k = -0{,}1; -0{,}3; -0{,}5; -0{,}7; -0{,}9; -1$ dan pada masing-masing nilai k ini secara berurutan diperoleh hasil sesuai urutan Gambar 7(a) sampai dengan 7(f).



Gambar 7. Hasil Chaos Game untuk $-1 \leq k < 0$ dan $a < b$

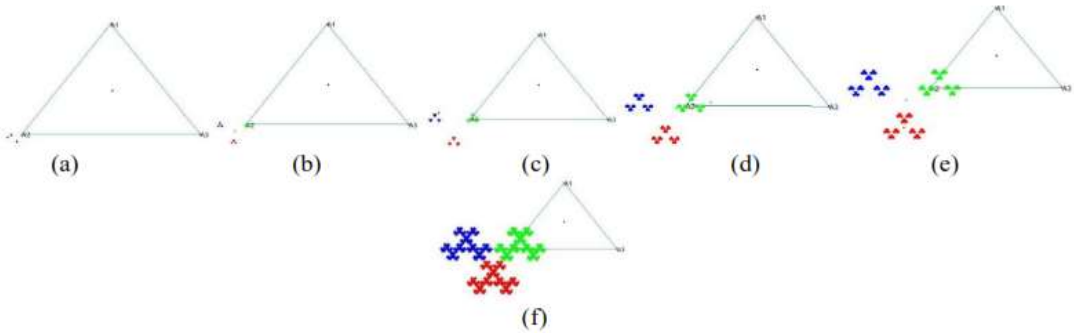
Untuk $-1 \leq k < 0$ dan $a = b$, diperoleh hasil simulasi sebagaimana dinyatakan pada Gambar 8. Pada gambar ini simulasi *chaos game* dilakukan dengan mengambil nilai $k =$

$-0{,}1; -0{,}3; -0{,}5; -0{,}7; -0{,}9; -1$ dan pada masing-masing nilai k ini secara berurutan diperoleh hasil sesuai urutan Gambar 8(a) sampai dengan 8(f).



Gambar 8. Hasil Chaos Game untuk $-1 \leq k < 0$ dan $a = b$

Untuk $-1 \leq k < 0$ dan $a > b$, diperoleh hasil simulasi sebagaimana dinyatakan pada Gambar 9. Pada gambar ini simulasi *chaos game* dilakukan dengan mengambil nilai $k = -0{,}1; -0{,}3; -0{,}5; -0{,}7; -0{,}9; -1$ dan pada masing-masing nilai k ini secara berurutan diperoleh hasil secara berurutan Gambar 9(a) sampai dengan 9(f).

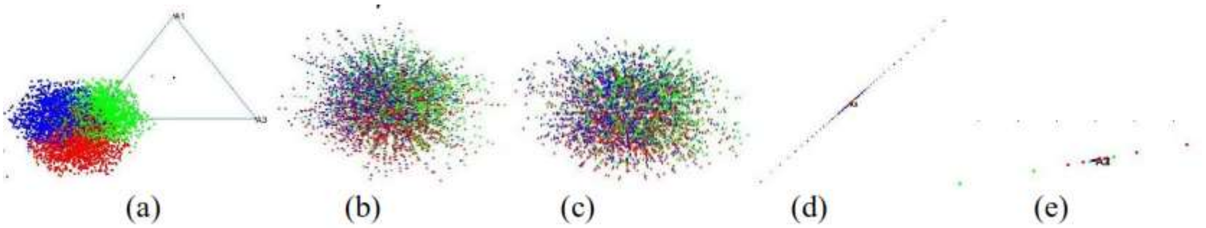


Gambar 9. Hasil Chaos Game untuk $-1 \leq k < 0$ dan $a > b$

Dari Gambar 7, Gambar 8, dan Gambar 9 terlihat bahwa secara umum hasil *chaos game* pada interval $-1 \leq k < 0$ untuk $a < b$, $a = b$, maupun $a > b$ akan memunculkan sifat fraktal. Sifat fraktalnya semakin terlihat saat nilai k mendekati 1. Sifat fraktal paling jelas untuk nilai a dan b berapapun dalam hal ini pada saat nilai k mendekati -1. Khususnya untuk nilai $a = b$, sifat fraktalnya semakin terlihat dibanding lainnya.

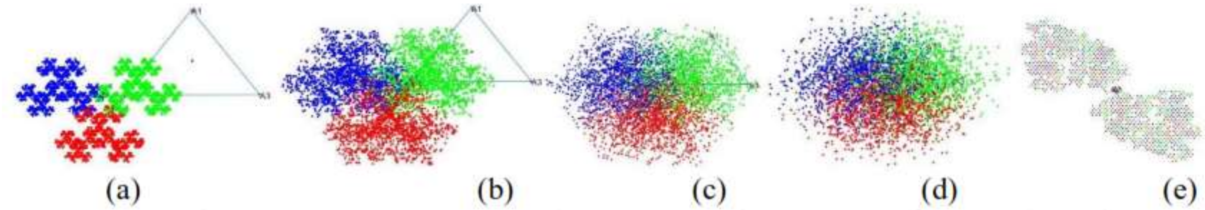
4. Hasil Chaos Game untuk $k < -1$

Untuk $k < -1$ dan $a < b$, diperoleh hasil simulasi sebagaimana dinyatakan pada Gambar 10. Pada gambar ini simulasi dilakukan pada nilai $k = -1{,}1; -1{,}3; -1{,}5; -1{,}7; -2$ dan pada masing-masing nilai k ini secara berurutan diperoleh hasil sesuai urutan Gambar 10(a) sampai dengan 10(e).



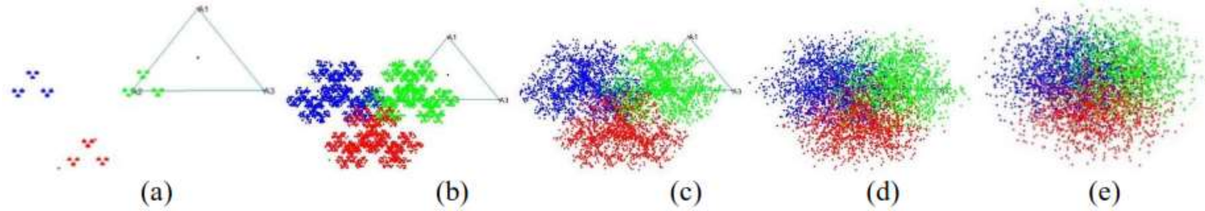
Gambar 10. Hasil Chaos Game untuk $k < -1$ dan $a < b$

Untuk $k < -1$ dan $a = b$, diperoleh hasil simulasi sebagaimana dinyatakan pada Gambar 11. Pada gambar ini simulasi dilakukan pada nilai $k = -1{,}1; -1{,}3; -1{,}5; -1{,}7; -2$ dan pada masing-masing nilai *k* ini secara berurutan diperoleh hasil sesuai urutan Gambar 11(a) sampai dengan 11(e).



Gambar 11. Hasil Chaos Game untuk $k < -1$ dan $a = b$

Untuk $k < -1$ dan $a > b$, diperoleh hasil simulasi sebagaimana dinyatakan pada Gambar 12. Pada gambar ini simulasi dilakukan pada nilai $k = -1{,}1; -1{,}3; -1{,}5; -1{,}7; -2$ dan pada masing-masing nilai *k* ini secara berurutan diperoleh hasil sesuai urutan Gambar 12(a) sampai dengan 12(e).



Gambar 12. Hasil Chaos Game untuk $k < -1$ dan $a > b$

Dari Gambar 10, Gambar 11, dan Gambar 12 terlihat bahwa hasil *chaos game* semakin kehilangan sifat fraktalnya pada saat nilai *k* mengecil menjauhi -1. Sebaliknya, untuk *k* yang cukup dekat ke nilai -1 sifat fraktalnya semakin nampak. Untuk hasil Gambar 10 pemilihan nilai $k = -1{,}1$ nampaknya kurang mendekati -1 sehingga sifat fraktalnya tetap belum terlihat sehingga harus diambil nilai *k* yang lebih kecil lagi mendekati -1.

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan pada Hasil Penelitian dan Pembahasan di atas, dapat disimpulkan beberapa hal menarik berkaitan dengan modifikasi *chaos game* yang dibahas dalam penelitian ini:

1. Secara umum *chaos game* dengan konstanta kombinasi linier $a, b,$ dan k yang terdefinisi pada Persamaan (1) dan Persamaan (2) di dalam interval $-1 \leq k \leq 1$ dapat menghasilkan berbagai bentuk objek fraktal. Dalam hal ini dikecualikan untuk nilai $a > b$ dan $0{,}5 < k \leq 1$ yang mana sifat faktalnya semakin menghilang saat nilai *k* mendekati 1.
2. Secara khusus, di dalam interval tersebut, sifat fraktal dari hasil *chaos game* semakin terlihat pada saat nilai $a = b$.

Hasil berbagai objek fraktal dalam simulasi *chaos game* yang dilakukan dalam penelitian ini untuk penelitian lebih lanjut perlu dilengkapi dengan kajian komputasi atau numerik. Tujuannya agar beberapa pembahasan di dalamnya dapat dilandasi teori secara analitik, khususnya berkaitan dengan komputasi matriks.

DAFTAR PUSTAKA

Afifa, R.A., Purnomo, K.D., Ubaidillah, F., & Husein, I. (2020). Variation of Rotation in Chaos Game by Modifying the Rules. *Zero: Jurnal Sains, Matematika, dan Terapan*, 4(1), 1–12.

Alkhori, E., Purnomo, K.D., & Julianto, B. (2019). Pembangkitan Fraktal Koch Anti-Snowflake (m,n,c) Menggunakan Metode Transformasi Affine. *Prosiding Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai Islami* (pp. 11–16). Malang: UIN.

Devaney, R.L. (2003). *Fractal Patterns and Chaos Game*. Boston: Department of Mathematics Boston University.

Hasang, S., & Supardjo, S. (2012). Geometri Fraktal dalam Rancangan Arsitektur. *Media Martasain*, 9(1), 111–124.

Jampour, M., Ebrahimzadeh, R., Yaghoobi, M., & Soleimani-nezhad, A. (2012). Towards A Fast Method for Iris Identification with Fractal and Chaos Game Theory. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 26(4), 1–14.

Ngilawajan, D.A. (2015). Konsep Geometri Fraktal dalam Kain Tenun Tanimbar. *Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 9(1), 33–39.

Pratiwi, U.M., Purnomo, K.D., & Ubaidillah, F. (2018). Kajian Fraktal k-Fibonacci Word Menggunakan Natural Drawing Rule. *Berkala Saintek*, 6(2), 67–70.

Purnomo, K.D., Armana, R.F., & Kusno (2016). Kajian Pembentukan Segitiga Sierpinski pada Masalah Chaos Game dengan Memanfaatkan Transformasi Affine. *Jurnal Matematika*, 6(2), 86–92.

Purnomo, K.D., Dewi, M.H., & Julianto, B. (2019). Modification of Chaos Game with Variation of Compression Ratio. *Journal of Physics: Conference Series ICCGANT*, *1538*, 2–9.

Purnomo, K.D., Larasati, I., Agustin, I.H., & Ubaidillah, F. (2019). Modification of Chaos Game with Rotational Variation on A Square. *CHAUCY-Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, 6(1), 27–33.

Purnomo, K.D., Pramestika, D.H., & Kamsyakawuni, A. (2020). Inovasi Desain Batik Fraktal Menggunakan Geometri Fraktal Koch Snowflake (m,n,c). *Prosiding Seminar Nasional Matematika, PRISMA 3* (pp. 131–140). Semarang: Jurusan Matematika UNNES.