

## ANALISIS KESALAHAN MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN PEMBUKTIAN TAK LANGSUNG PADA MATERI GEOMETRI NON-EUCLID

<sup>1</sup>Kadek Adi Wibawa dan <sup>2</sup>I Putu Ade Andre Payadnya

<sup>1,2</sup>Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Mahasaraswati Denpasar

Email: [adiwibawa@unmas.ac.id](mailto:adiwibawa@unmas.ac.id)

### ABSTRACT

This study aims to describe the errors that occur in students in completing indirect proof on Non-Euclidean Geometry material. The method used is descriptive research using a qualitative approach. The subjects of this study were 35 students of Mathematics Education Program FKIP Mahasaraswati Denpasar University in the third semester. Researchers provide two indirect proof problems to students. The results showed that there were nine types of errors that occurred. The first error, namely proof of error without supposition; the second error, which is an error in determining the presupposition; the third error, namely errors in referring to the basis of proof (postulate or theorem); the fourth error, namely the error without concluding, the fifth error, namely the error writing symbols; the sixth error, which is proof of error based on a picture or case; the seventh error, namely the error of logical reasoning; The eighth error, namely the error in understanding the problem, and the ninth error, namely the error of proof is incomplete. This research is important to be carried out so that Educators can decide the right learning strategy for students so that errors can be minimized.

**Key words:** error analysis, indirect proof, and Non-Euclidean Geometry

### ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan kesalahan yang terjadi pada mahasiswa dalam menyelesaikan pembuktian tak langsung pada materi Geometri Non-Euclid. Metode yang digunakan adalah penelitian deskriptif dengan menggunakan pendekatan kualitatif. Subjek penelitian ini adalah mahasiswa program studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Mahasaraswati Denpasar semester III sebanyak 35 mahasiswa. Peneliti memberikan dua masalah pembuktian tak langsung kepada mahasiswa. Hasil penelitian menunjukkan bahwa terdapat sembilan tipe kesalahan yang terjadi. Kesalahan pertama, yaitu kesalahan pembuktian tanpa pengandaian; kesalahan kedua, yaitu kesalahan dalam menentukan pengandaian; kesalahan ketiga, yaitu kesalahan dalam merujuk dasar pembuktian (postulat atau teorema); kesalahan keempat, yaitu kesalahan tanpa menyimpulkan, kesalahan kelima, yaitu kesalahan penulisan simbol; kesalahan keenam, yaitu kesalahan membuktikan berdasarkan gambar atau kasus; kesalahan ketujuh, yaitu kesalahan penalaran logis; Kesalahan kedelapan, yaitu kesalahan dalam memahami soal, dan kesalahan kesembilan, yaitu kesalahan pembuktian tak lengkap. Penelitian ini penting untuk dilakukan agar Pendidik dapat menentukan strategi pembelajaran yang tepat kepada mahasiswa sehingga kesalahan yang terjadi dapat diminimalisir.

**Kata Kunci:** analisis kesalahan, pembuktian tak langsung, dan Geometri Non-Euclid

### PENDAHULUAN

Di era 4.0 ditandai dengan derasnya arus teknologi dan informasi yang berkembang. Banyak informasi yang diterima yang memerlukan kemampuan cerdas dalam memilih dan memilah informasi yang valid. Untuk bisa pada tahap itu diperlukan kemampuan berpikir kritis, yang memiliki ciri berpikir detail, terstruktur, jeli, dan komprehensif serta mampu menunjukkan bukti atau pengalasan (*reasoning*) yang tepat

terhadap setiap informasi yang diterima. Pada mata kuliah geometri non Euclid mahasiswa diminta untuk belajar bagaimana membuktikan suatu teorema yang telah disusun secara terstruktur oleh ahli-ahli Non Euclid. Pumbuktian tersebut meliputi, pembuktian langsung dan tak langsung.

Pada awalnya geometri hanya menitikberatkan pada perhitungan jarak, luas dan volume. Pada abad ke-3 sebelum masehi geometri ditata oleh seorang

matematikawan jenius menjadi aksioma-aksioma Euclid, yang berisikan pernyataan-pernyataan matematika yang bersifat formal dan perlu pembuktian. Sejak saat itu, geometri Euclid menjadi sangat terkenal. Buku Euclid yang pertama berjudul "The Element" berisi tentang definisi, postulat, gagasan umum dan proposisi. Terdapat 23 definisi dalam buku yang disusun oleh Euclid, 5 postulat, 441 proposisi atau dalil. Buku The Element sangat terkenal sejak saat itu, hingga satu ketika terdapat beberapa ahli yang tidak setuju dengan sebagian besar isi buku Euclid. Setidaknya terdapat 3 alasan utama, aliran Non-Euclid mengkritisi buku tersebut, (1) Semua istilah didefinisikan, seperti titik dan garis. Menurut beberapa ahli, titik dan garis tidak perlu untuk didefinisikan. (2) postulat kelima dari Euclid yang terkenal dengan postulat kesejajaran, terlalu panjang sehingga dianggap membingungkan oleh para matematikawan. (3) terdapat dalil yang pembuktiannya tidak logis atau dasar tidak kuat, seperti melalui suatu ruas garis dapat dilukis suatu segitiga samasisi. Berangkat dari sikap kritis inilah lahir Geometri Non-Euclid.

Dalam pembelajaran geometri non euclid, mahasiswa sering kali mengalami kesulitan. Kesulitan yang dialami adalah pada saat mengingat definisi dan postulat, hingga pada pembuktian langsung dan tak langsung. Dalam melakukan pembuktian, mahasiswa perlu memahami definisi, postulat dan teorema sebelumnya yang sudah dibuktikan. Prestasi mahasiswa yang rendah pada matakuliah geometri non euclid mendorong peneliti untuk mencari solusi terbaik, salah satu adalah menganalisis kesalah-kesalahan yang

terjadi pada saat mahasiswa melakukan pembuktian tak langsung.

## **METODE PENELITIAN**

Data yang dikumpulkan dalam penelitian ini berupa kata-kata atau kalimat sehingga hasil penelitian ini berupa data deskriptif. Analisis data pada penelitian ini bersifat induktif karena kegiatan analisis datanya menggunakan fakta-fakta dari lapangan yang diamati melalui hasil pekerjaan mahasiswa dalam membuktikan suatu teorema. Menurut Creswell (2007), Bogdan & Taylor (dalam Moleong, 2007), serta Yin (2011), penelitian semacam ini tergolong penelitian kualitatif. Penelitian ini dilaksanakan di Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Mahasaraswati Denpasar pada mahasiswa semester 3 sebanyak 35 orang. Penelitian ini dilaksanakan mulai dari bulan September 2019 hingga Januari 2020.

Sesuai dengan studi pendahuluan, dalam penelitian ini jawaban mahasiswa dikelompokkan menjadi 9 tipe kesalahan: (1) kesalahan pembuktian tanpa pengandaian, (2) kesalahan dalam menentukan pengandaian, (3) kesalahan dalam merujuk dasar pembuktian, (4) kesalahan tanpa menyimpulkan, (5) kesalahan penulisan simbol, (6) kesalahan membuktikan berdasarkan gambar atau kasus, (7) kesalahan penalaran logis, (8) kesalahan dalam memahami soal, dan (9) kesalahan pembuktian tak lengkap. Data diambil melalui tes secara klasikal dengan menggunakan 2 soal, kemudian dianalisis dengan cara mendokumentasikan, mengkatogorisasi, mereduksi, dan menarik kesimpulan.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil tes secara klasikal diperoleh data sebagai berikut:

Tabel 1: Rekapitulasi Jawaban Benar dan Salah

Kategori Jawaban	Jumlah Mahasiswa Menjawab	
	Soal 1	Soal 2
Jawaban Benar	12	13
Jawaban Salah	22	21
Tidak Menjawab	1	1

Berdasarkan tabel 1 diperoleh bahwa mahasiswa yang menjawab benar pada soal nomer 1 adalah 12 orang, yang

menjawab salah 22 orang, dan tidak menjawab sebanyak 1 orang. Mahasiswa yang menjawab benar pada soal nomer 2 sebanyak 13 orang, yang menjawab salah ada 21 orang, dan yang tidak menjawab sebanyak 1 orang. Dari tabel 1, diperoleh bahwa siswa yang menjawab salah pada soal nomer 1 sebanyak 62,86 % dan yang menjawab salah pada soal nomer 2 sebanyak 60 %. Tingkat kesalahan lebih besar dibandingkan dengan jawaban benar yang dihasilkan mahasiswa dalam memecahkan masalah pembuktian tak langsung pada geometri non euclid.

Sebaran kesalahan yang terjadi berdasarkan sembilan tipe kesalahan adalah sebagai berikut:

Tabel 2. Sebaran Kesalahan Mahasiswa dalam Memecahkan Masalah Pembuktian Tak Langsung pada Geometri Non-Euclid

Tipe Kesalahan	Tipe Kesalahan	Jumlah Mahasiswa Menjawab	
		Soal 1	Soal 2
1	Kesalahan pembuktian tanpa pengandaian	11	6
2	Kesalahan dalam menentukan pengandaian	0	2
3	Kesalahan dalam merujuk dasar pembuktian	2	1
4	Kesalahan tanpa menyimpulkan	8	5
5	Kesalahan penulisan simbol	8	4
6	Kesalahan membuktikan berdasarkan gambar atau kasus	6	1
7	Kesalahan penalaran logis	10	6
8	Kesalahan dalam memahami soal	3	6
9	Kesalahan pembuktian tak lengkap	1	5

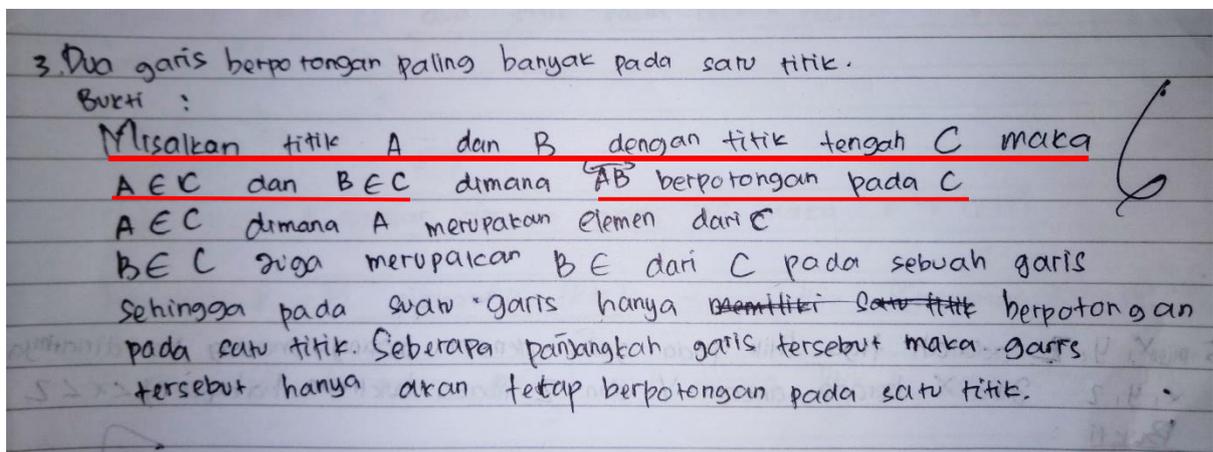
Berdasarkan tabel 2 diperoleh gambaran bahwa mahasiswa yang melakukan kesalahan pembuktian tanpa pengandaian pada soal nomer 1 sebanyak 11 orang dan pada soal nomer 2 sebanyak 6 orang. Kesalahan tipe kedua yaitu

kesalahan dalam menentukan pengandaian pada soal nomer 2 sebanyak 2 orang. Dalam hal ini, mahasiswa membuat pengandaian tetapi pengandaian yang dibuat salah. Kesalahan tipe ketiga yaitu kesalahan dalam merujuk dasar

pembuktian pada soal nomer 1 sebanyak 2 orang dan pada soal nomer 2 sebanyak 1 orang. Kesalahan yang keempat adalah kesalahan tanpa menyimpulkan pada soal nomer 1 sebanyak 8 orang, dan pada soal nomer 2 sebanyak 5 orang. Kesalahan tipe kelima, yaitu kesalahan dalam penulisan simbol pada soal nomer 1 terdapat 8 orang dan pada soal nomer 4 terdapat 4 orang. Kesalahan tipe keenam yaitu kesalahan membuktikan berdasarkan gambar atau kasus pada soal nomer 1 sebanyak 6 orang dan pada soal nomer 2 sebanyak 1 orang. Kesalahan tipe ketujuh yaitu kesalahan

penalaran logis pada soal nomer 1 sebanyak 10 orang dan pada soal nomer 2 sebanyak 6 orang. Kesalahan tipe kedelapan yaitu kesalahan dalam memahami soal pada soal nomer 1 sebanyak 3 orang dan pada soal nomer 2 sebanyak 6 orang. Kesalahan tipe kesembilan yaitu kesalahan pembuktian tak lengkap pada soal nomer 1 sebanyak 1 orang dan pada soal nomer 2 sebanyak 5 orang.

Secara deskriptif kesalahan yang terjadi adalah sebagai berikut:

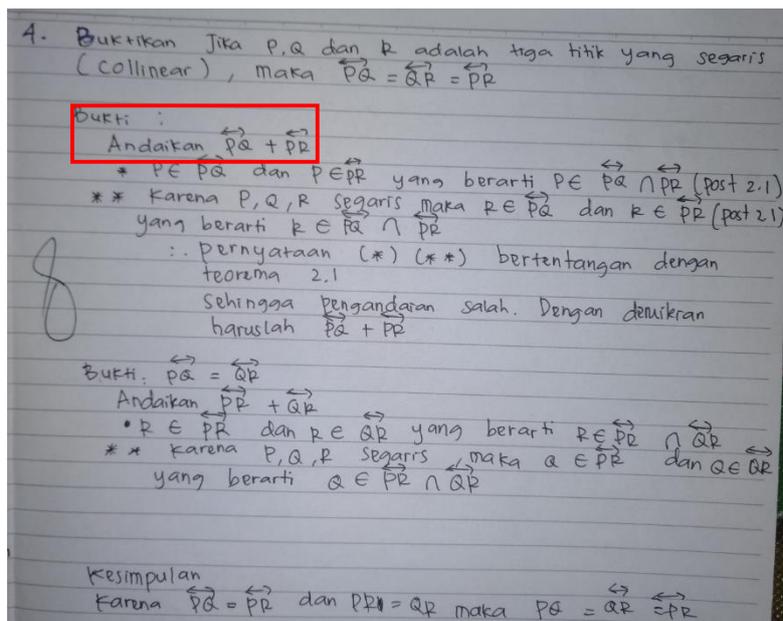


Gambar 1. Kesalahan subjek tipe 1, 4 dan 7 dalam pembuktian tak langsung geometri Non Euclid

Pada jawaban yang diberikan subjek tidak membuat pengandaian, yang mana salah satu langkah yang harus dilakukan dalam melakukan pembuktian tak langsung adalah membuat pengandaian. Kesalahan berikutnya tampak pada garis merah, yang menunjukkan bahwa penalaran yang digunakan tidak logis, atau terjadi kesalahan dalam melakukan penalaran logis. “Misalkan  $A$  dan  $B$  dengan titik tengah  $C$  maka  $A \in C$  dan  $B \in C$ ” Ketidaklogisan yang terjadi adalah  $A$  dan  $B$  adalah titik yang merupakan anggota dari titik yang lain yaitu  $C$ . Kedua tidak ada hubungna implikasi antara pernyataan

yang dimaksud, walaupun diperkuat dengan pernyataan “ $\overline{AB}$  berpotongan pada  $C$ ”. Kesalahan yang terjadi berikutnya adalah kesalahan tipe 4, yaitu kesalahan tanpa membuat kesimpulan. Pembuktian dikatakan selesai jika sudah ada kesimpulan yang diperoleh. Dalam hal ini, subjek tidak menyelesaikan pembuktian hingga selesai.

Kesalahan yang berikutnya adalah kesalahan tipe 2, yaitu kesalahan dalam menentukan pengandaian. Berikut salah satu jawaban dari subjek:

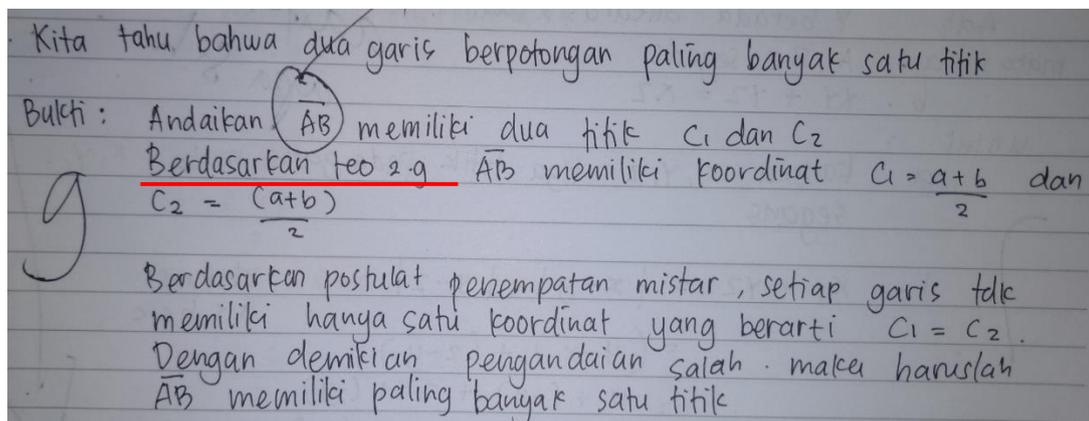


**Gambar 2.** Kesalahan subjek tipe 2 dalam pembuktian tak langsung geometri Non Euclid

Gambar 2 menunjukkan kesalahan subjek pada saat menentukan pengandaian. Semestinya pengandaianya adalah  $\vec{PQ} \neq \vec{PR}$  bukan  $\vec{PQ} + \vec{PR}$ . Pengandaian  $\vec{PQ} + \vec{PR}$  tidak memiliki makna pada konteks pembuktian ini. Jika diperhatikan hingga

akhir, kesimpulan yang diambil juga salah.

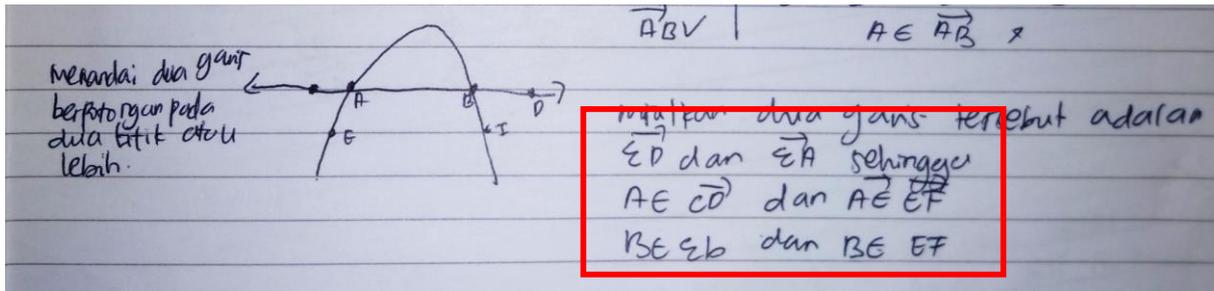
Kesalahan tipe 3 atau kesalahan subjek dalam merujuk dasar, yaitu sebagai berikut:



**Gambar 3.** Kesalahan subjek tipe 2 dalam pembuktian tak langsung geometri Non Euclid

Gambar 3 menunjukkan bahwa subjek melakukan kesalahan dalam merujuk teorema yang dijadikan dasar untuk membuktikan pernyataan. Dalam hal ini teorema yang dirujuk adalah teorema 2.9 padahal soal yang diberikan adalah modifikasi dari teorema 2.1.

Kesalahan berikutnya adalah kesalahan tipe 5 yaitu kesalahan subjek dalam menuliskan simbol matematika, berikut adalah contohnya:

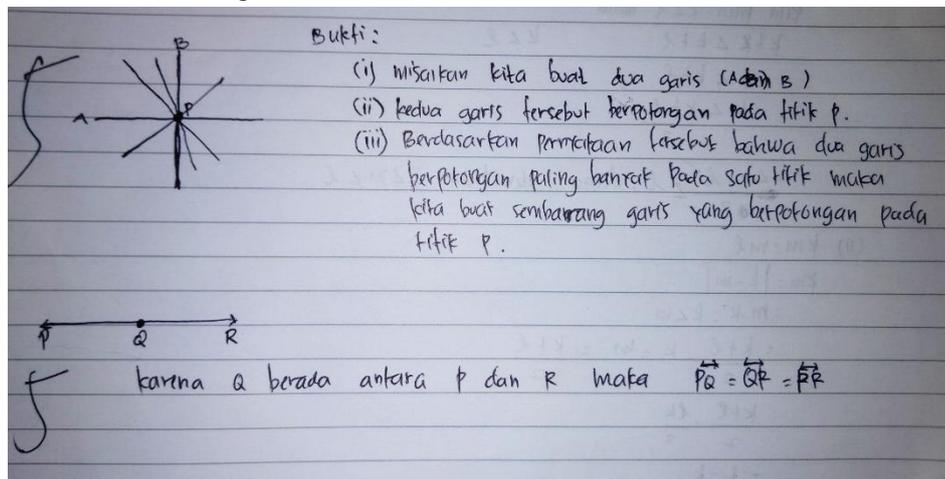


Gambar 4. Kesalahan subjek tipe 5 dalam pembuktian tak langsung geometri Non Euclid

Gambar 4 menunjukkan bahwa subjek melakukan kesalahan dalam penulisan simbol matematika. Mahasiswa tidak bisa membedakan antara  $EF$ ,  $\overline{EF}$ ,  $\overrightarrow{EF}$ , dan  $\overleftarrow{EF}$ . Pada buku yang digunakan  $EF$  memiliki arti panjang ruas garis dari titik  $E$  ke titik  $F$ .  $\overline{EF}$  memiliki arti ruas garis dari  $E$  ke

titik  $F$ .  $\overrightarrow{EF}$  memiliki arti sinar garis dari  $E$  ke titik  $F$ .  $\overleftarrow{EF}$  memiliki arti garis  $\overline{EF}$ .

Berikutnya kesalahan dalam membuktikan teorema menggunakan gambar. Berikut adalah ilustrasinya:

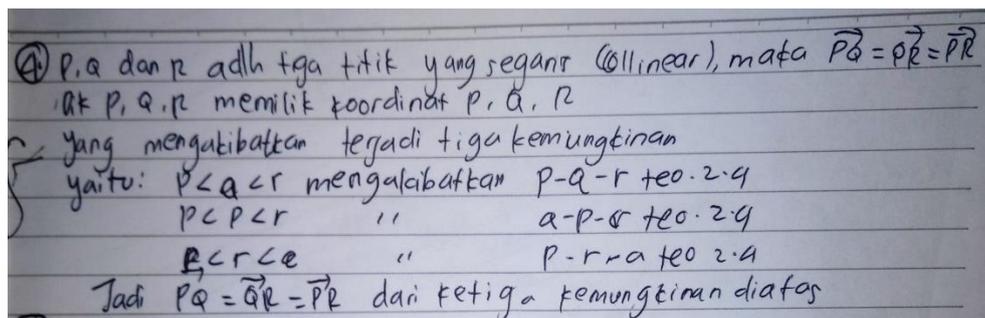


Gambar 6. Kesalahan subjek tipe 5 dalam pembuktian tak langsung geometri Non Euclid

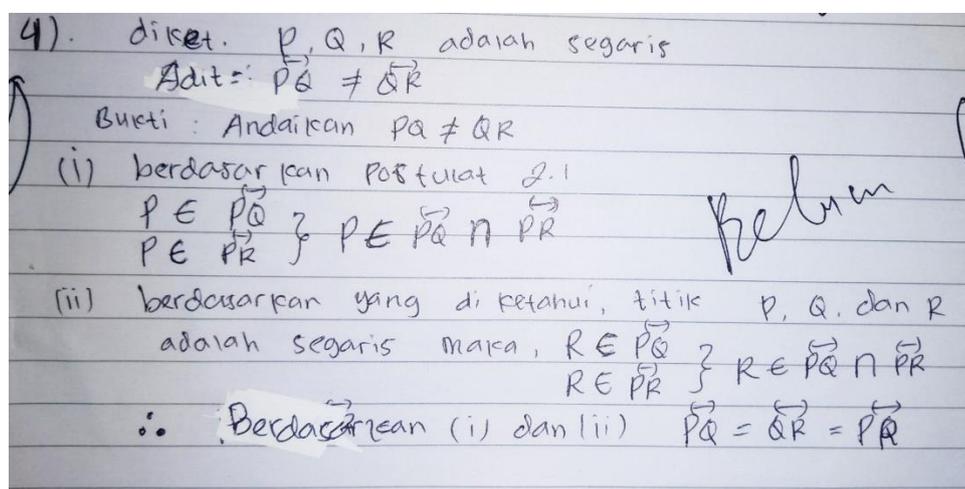
Pada soal nomer 1, subjek menjelaskan gambar yang dibuat dan diyakini sebagai pembuktian. Hal tersebut ditunjukkan dengan pernyataan subjek yaitu "Misalkan kita buat dua garis  $A$  dan  $B$ ". Kedua garis tersebut berpotongan pada titik  $P$ . Berdasarkan..." Begitu juga pada soal nomer 2, subjek sangat yakin melalui gambar yang dibuat pernyataan sudah dibuktikan. Dalam matematika yang

bersifat logis, tidak bisa menerima begitu saja pembuktian hanya menggunakan gambar. Gambar bisa digunakan untuk membantu memahami teorema bukan sebagai bukti dari kebenaran suatu teorema.

Kesalahan dalam memahami masalah juga terjadi dalam pembuktian tak langsung pada geometri non Euclid, berikut adalah contohnya:



**Gambar 7.** Kesalahan subjek tipe 8 dalam pembuktian tak langsung geometri Non Euclid Pada gambar 7 menunjukkan bahwa subjek tidak memahami pernyataan yang terdapat pada soal, sehingga mengakibatkan kesalahan dalam menentukan arah pembuktian. Memahami masalah merupakan langkah awal dalam melakukan pembuktian. Kesalahan yang terakhir adalah kesalahan pembuktian tak lengkap. Berikut adalah ilustrasinya:



**Gambar 8.** Kesalahan subjek tipe 9 dalam pembuktian tak langsung geometri Non Euclid

Gambar 8 menunjukkan kesalahan subjek karena mengambil kesimpulan tanpa melakukan pembuktian secara lengkap. Harusnya yang dibuktikan bukannya  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QR}$  tetapi pernyataan  $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ . Barulah berdasarkan sifat transitif diperoleh  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR}$ . Akibatnya  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ .

### PENUTUP

Dalam menyelesaikan soal pembuktian tak langsung pada geometri non euclid terdapat 9 tipe kesalahan yang terjadi, yaitu: (1) kesalahan pembuktian tanpa pengandaian, (2) kesalahan dalam

menentukan pengandaian, (3) kesalahan dalam merujuk dasar pembuktian, (4) kesalahan tanpa menyimpulkan, (5) kesalahan penulisan simbol, (6) kesalahan membuktikan berdasarkan gambar atau kasus, (7) kesalahan penalaran logis, (8) kesalahan dalam memahami soal, dan (9) kesalahan pembuktian tak lengkap. Beberapa subjek ada yang mengalami lebih dari 1 kesalahan.

Saran bagi mahasiswa: dalam pembuktian sangat diperlukan berpikir kritis (detail, terstruktur, jeli, dan komprehensif), cara untuk meminimalisir kesalahan adalah dengan mengasah

keterampilan melalui latihan secara berkesinambungan dan terjadwal, pahami materi dengan baik, dan pahami metode pembuktian tak langsung. Bagi dosen (pendidik), gunakan strategi yang inovatif, seperti flipped learning berbasis video, dan strategi lainnya dan tingkatkan interaksi dalam kelas, terutama untuk tujuan pemastian pemahaman siswa tentang materi

#### **DAFTAR PUSTAKA**

- Suyitno, A. 2017. Geometri Non Euclid.  
Semarang: Unnes Press
- Juniati, D. 2012. Geometri Euclid.  
Surabaya: Unesa Press