

MATEMATIKA SEBAGAI MODAL DAN MODEL BERPIKIR ILMIAH

I Made Surat¹

¹IKIP PGRI BALI

Email: madesurat@gmail.com

ABSTRACT

This paper aims to describe the process of scientific thinking based on mathematical thinking. Through learning mathematics will train us to think logically, based on facts as a known element, then formulate hypotheses that will direct our thinking process to produce conclusions. The process in mathematics is stated by: Known (these are facts), Calculate / prove (This is as a problem statement or hypothesis) ... and next is the Count / proof ... These steps are steps of scientific thinking. In the process of proof or calculation in mathematics can use intuition, analogy, trial and error, deductive and inductive (mathematical induction). Likewise in proof, it can use direct or indirect proof through a process of drawing conclusions based on Ponens Mode, Tollens Mode and Syllogism.

Keywords: Mathematics, Models, and Scientific Thinking

ABSTRAK

Karya tulis ini bertujuan untuk mendeskripsikan tentang proses berpikir ilmiah yang didasarkan kepada berpikir secara matematis. Melalui belajar matematika akan melatih kita untuk berpikir logis, berdasarkan fakta-fakta sebagai unsur yang diketahui, kemudian menyusun hipotesis yang akan mengarahkan peroses berpikir kita sehingga menghasilkan kesimpulan. Proses tersebut dalam matematika dinyatakan dengan: Diketahui (ini adalah fakta-fakta), Hitung/buktikan (Ini sbg rumusan masalah maupun hipotesis)... dan berikutnya adalah Hitungan/bukti... Langkah-langkah tersebut adalah merupakan langkah berpikir ilmiah. Dalam proses pembuktian ataupun perhitungan dalam matematika bisa menggunakan intuisi, analogi, trial and error, deduktif maupun induktif (induksi matematis). Begitu pula dalam pembuktian bisa menggunakan pembuktian langsung maupun tak langsung melalui suatu proses penarikan kesimpulan yang berdasarkan pada Modus Ponens, Modus Tollens maupun Silogisme.

Kata Kunci: Matematika, Model, dan Berpikir Ilmiah

PENDAHULUAN

Manusia dalam sejarahnya yang singkat telah mengubah wajah dunia dan dirinya sendiri. Ciri khas yang dipunyai adalah perubahan yang terarah dengan menggunakan pemikirannya. Dialah Si *Homosapien* mahluk yang berpikir. Berpikirlah yang membedakan manusia dengan mahluk lainnya.

Kita sudah begitu sering berpikir, rasa-rasanya berpikir begitu mudah, semenjak kecil kita sudah biasa melakukannya. Setiap hari kita berdialog dengan diri kita sendiri, berdialog dengan orang lain, bicara, menulis, membaca suatu uraian, mengkaji suatu tulisan, mendengarkan penjelasan-penjelasan dan mencoba menarik suatu kesimpulan dari apa

yang kita lihat, dan kita dengar. Namun apabila diselidiki lebih lanjut, dan terutama bila harus dipraktikkan sungguh-sungguh, ternyata bahwa berpikir dengan teliti dan tepat merupakan kegiatan yang cukup sukar. Manakala kita meneliti dengan seksama dan sistematis berbagai penalaran, ternyata banyak penalaran tidak nyambung ataupun sesat dalam mengambil kesimpulan. Diperlukan kemampuan, pengetahuan dan latihan yang cukup untuk dapat melakukan proses berpikir yang runut dan benar. Dituntut kemampuan untuk melihat hubungan-hubungan, kejanggalan-kejanggalan dan kesalahan yang tersambung. Waspada terhadap membenaran diri dicari-cari terhadap perasaan pribadi, kelompok atau golongan. Charles Lamb

(dalam Puspoprojo dan Gilarso, 1999) menyebut dirinya sebagai ” *a bundle of prejudices made up of liking and disliking* ”. Orang biasanya menganggap benar terhadap apa yang disukainya atau apa yang dimauinya, ucapan salah kaprah, kebiasaan-kebiasaan dan pendapat umum mempengaruhi jalan pikiran kita.

Kampus sebagai masyarakat ilmiah hendaknya mengembangkan dan melatih pola-pola berpikir yang benar. Sebagai masyarakat ilmiah tentu mempunyai beban dan tanggung jawab untuk mengembangkan khasanah ke ilmuan. Pemikiran ke ilmuan bukanlah pemikiran yang biasa. Pemikiran keilmuan adalah pemikiran yang sungguh-sungguh. Artinya suatu cara berpikir yang berdisiplin, di mana seorang yang berpikir sungguh-sungguh takkan membiarkan ide dan konsep yang sedang dipikirkannya berkelana tanpa arah, tapi harus diarahkan pada suatu tujuan tertentu, yaitu ilmu pengetahuan.

Ilmu adalah pengetahuan yang telah teruji kebenarannya melalui metode ilmiah. Berarti ilmu pada hakikatnya adalah pengetahuan ilmiah. Seseorang yang telah memiliki pengetahuan ilmiah dituntut memiliki sifat-sifat terbuka, jujur, teliti, kritis, tidak mudah percaya tanpa adanya bukti-bukti tidak cepat putus asa dan tidak cepat puas dengan hasil kerjanya. Sifat-sifat tersebut merupakan pencerminan sikap ilmiah yang pada akhirnya mempengaruhi cara berpikir dan bertindak. Setiap karya ilmiah harus mengandung kebenaran ilmiah, yakni kebenaran yang tidak hanya didasarkan atas rasio, tetapi juga dapat dibuktikan secara empiris. Rasionalisme dan empirisme inilah yang menjadi tumpuan berpikir manusia. Rasionalisme mengandalkan kemampuan penalaran, sedangkan empirisme mengandalkan bukti-bukti fakta nyata. Menggabungkan kedua cara tersebut yakni berpikir rasional dan

berpikir empiris adalah merupakan berpikir ilmiah.

Sebagai kaum terpelajar sudah sepatutnya berlatih dan terus mengembangkan pola pola berpikir ilmiah. Sebagaimana yang diamanatkan dalam pendidikan yang berorientasi kecakapan hidup (Depdiknas ; 2002) bahwa kemampuan berpikir rasional dan kecakapan akademik yang disebut sebagai kemampuan berpikir ilmiah adalah merupakan kompetensi dasar yang harus dicapai pada setiap jenjang pendidikan menurut kompleksitas dan tingkatannya.

Dalam proses berpikir ilmiah yang membuahkan ilmu pengetahuan, sering kali dalam kegiatannya menggunakan lambang. Lambang merupakan abstraksi dari objek yang sedang dipikirkan. Bahasa adalah salah satu dari lambang tersebut , di mana objek-objek kehidupan yang konkret dinyatakan dengan kata-kata. Dapat dibayangkan betapa sukarnya proses berpikir tersebut tanpa adanya lambang-lambang yang dapat mengabstraksikan berbagai gejala kehidupan.

Dalam pendidikan formal anak belajar matematika dari SD sampai SLTA, bahkan dari TK sampai Perguruan Tinggi. Matematika yang merupakan ilmu penalaran banyak menggunakan simbol-simbol dalam proses penalaran, mempunyai fungsi yang sama dengan bahasa. Melalui bahasa verbal dan bahasa kuantitatif, anak mulai berkomunikasi dengan lingkungannya. Selanjutnya diperkenalkan kepada anak suatu berpikir formal, yaitu suatu kegiatan yang untuk selanjutnya tidak akan pernah berhenti sampai pada akhir hayatnya. Persoalannya dapatkah matematika dijadikan sebagai modal dalam berpikir ilmiah , serta bagaimana model-model berpikir ilmiah dalam matematika. Untuk itu hal ini perlu dibahas lebih lanjut, sehingga anak yang belajar matematika dapat menajamkan proses berpikirnya serta

menjadikan matematika sebagai pedoman dalam kerangka berpikir ilmiah.

Menyadari adanya kesulitan dan kesesatan yang sering dialami seseorang dalam berpikir ilmiah mendorong penulis untuk menggali potensi –potensi ilmu matematika yang dikenal sebagai ilmu penalaran yang bersifat deduktif. Melalui pola berpikir matematika seseorang akan belajar memikirkan caranya ia berpikir serta menemukan suatu model untuk berpikir ilmiah.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Istilah berpikir menunjuk kepada suatu bentuk kegiatan akal yang terarah (Poespoprodjo dan Gilarso, 1989). Melamun tidaklah sama dengan berpikir, demikian pula merasakan, kerja pancaindra, kegiatan ingatan dan khayalan. Dengan kata-kata yang lebih sederhana Plato dan Aristoteles menyebutkan bahwa berpikir adalah bicara dengan dirinya sendiri di dalam batin.

Pemahaman lain tentang berpikir dalam konteks keilmuan adalah, bahwa berpikir itu merupakan suatu penalaran (reasoning). Dalam hal ini titik beratnya terletak dalam usaha untuk memahami objek yang belum ditetapkan. Bochenski (1992) menyebutkan bahwa hanya terdapat dua kemungkinan dalam hubungannya dengan objek yang ingin diketahui, yaitu apakah objek itu telah ditetapkan atau belum. Jika objek itu telah ditetapkan maka kita lakukan hanyalah mengamatinya dan kemudian mengilustrasikannya. Jika belum ditetapkan maka tak ada jalan lain kecuali melakukan penalaran.

Tujuan pemikiran manusia adalah mencapai pengetahuan yang benar dan sedapat mungkin pasti. Tetapi dalam kenyataan hasil pemikiran (kesimpulan) maupun alasan-alasan yang diajukan belum tentu selalu benar. Benar berarti sesuai

dengan kenyataan. Ukuran untuk menentukan apakah suatu pemikiran atau ucapan itu benar atau tidak benar, bukanlah rasa senang atau tidak senang, enak atau tidak enak didengar, melainkan cocok atau tidak cocok dengan realitas atau fakta.

Agar suatu pemikiran atau penalaran menghasilkan kesimpulan yang benar, harus memenuhi tiga syarat pokok yaitu :

- 1). Pikiran harus berpangkal dari kenyataan atau titik pangkalnya harus benar
- 2). Alasan-alasan yang diajukan harus tepat dan kuat
- 3). Jalan pikiran harus logis/ urutan langkah – langkahnya tepat.

Sebagai contoh, bandingkan tiga pemikiran berikut ini, dan mengapa kesimpulannya salah.

- a) Semua orang berambut gondrong itu penjahat. Para penjahat harus dihukum. Jadi, semua orang yang berambut gondrong harus dihukum.

Analisis : Jalan pikiran logis tetapi kesimpulan salah karena titik pangkal salah, : berambut

Gondrong. Tidak sama dengan penjahat.

- b) Tetangga saya mempunyai mobil. Oleh karena itu sayapun harus mempunyai mobil.

Analisis : Tidak cukup alasan bahwa tetangga harus sama dengan saya. Jadi dalam hal apa

harus sama atau tidak sama.

- c) Semua sapi itu binatang. Semua kuda itu binatang. Jadi sapi itu kuda.

Analisis : Kalimat pertama dan kedua benar (premis-premis), tapi kesimpulan salah. karena

jalan pikiran (kaitan antara premis dan kesimpulan) keliru.

Sesuai dengan titik pangkal dalam proses pemikiran, dapat dibedakan dua pola dasar pemikiran, yaitu berpikir deduktif dan berpikir induktif.

1 Berpikir Deduktif

Berpikir deduktif atau berpikir rasional merupakan sebagian dari berpikir ilmiah. Logika deduktif yang dipergunakan dalam berpikir rasional merupakan salah satu unsur dari metode logiko-hipoteko-verifikatif atau metode ilmiah. Dalam logika deduktif, menarik suatu kesimpulan dimulai dari pernyataan umum menuju pernyataan-pernyataan khusus dengan menggunakan penalaran atau rasio (berpikir rasional). Hasil atau produk berpikir deduktif dapat digunakan untuk menyusun hipotesis, yakni jawaban sementara yang kebenarannya masih perlu diuji atau dibuktikan melalui proses keilmuan selanjutnya. Contoh berpikir deduktif : Salah satu prinsip atau hukum dalam fisika menyatakan bahwa setiap benda padat kalau dipanaskan akan memuai (pernyataan umum). Besi, seng , adalah benda padat (fakta-fakta khusus). Oleh sebab itu, besi dan seng, jika dipanaskan, akan memuai (kesimpulan atau pernyataan khusus). Dengan perkataan lain, menggunakan argumentasi teoritis melalui penalaran, tidak menggunakan bukti-bukti secara empiris.

Contoh lainnya : Teori dalam bidang pendidikan menyatakan : prestasi seseorang ditentukan oleh kemampuan yang dimilikinya (faktor intern) dan lingkungan yang membentuknya (faktor ekstern). Cara belajar atau metode belajar termasuk salah satu lingkungan (faktor eksternal). Oleh sebab itu, prestasi belajar siswa dipengaruhi oleh cara belajar yang digunakannya. Pertanyaan yang dapat diajukan adalah: dalam kondisi kemampuan siswa yang relatif sama, manakah yang lebih tinggi prestasinya di antara siswa yang menggunakan metode belajar kelompok dibandingkan siswa yang menggunakan metode belajar mandiri?

Hipotesis yang bisa diturunkan dari pertanyaan di atas adalah:

a) Tidak terdapat perbedaan prestasi belajar diantara siswa yang melakukan cara belajar mandiri

dengan siswa yang melakukan cara belajar secara kelompok ($M=K$).

b) Siswa yang melakukan cara belajar secara mandiri menunjukkan prestasi belajar yang lebih

tinggi daripada siswa yang melakukan cara belajar secara kelompok ($M>K$).

c) Siswa yang melakukan cara belajar secara kelompok menunjukkan prestasi belajar yang lebih

tinggi daripada siswa yang melakukan cara belajar secara mandiri ($K>M$).

Dari ketiga hipotesis di atas, hipotesis manakah yang paling benar?, untuk menjawabnya dibutuhkan fakta-fakta empiris yang relepan.

2. Berpikir Induktif

Proses berpikir induktif adalah kebalikan dari berpikir deduktif, yakni pengambilan kesimpulan dimulai dari pernyataan atau fakta-fakta khusus menuju pada kesimpulan yang bersifat umum. Proses berpikir induktif tidak dimulai dari teori yang bersifat umum, tetapi dari fakta atau data khusus berdasarkan pengamatan di lapangan atau pengalaman empiris. Data dan fakta hasil pengamatan empiris disusun , diolah, dikaji, untuk kemudian ditarik maknanya dalam bentuk pernyataan atau kesimpulan yang bersifat umum. Menarik kesimpulan umum dari data khusus berdasarkan pengamatan empiris tidak menggunakan rasio atau penalaran, tetapi menggunakan cara lain , yakni menggeneralisasikan fakta melalui statistika. Perhatikan contoh di bawah ini.

Kita ingin mengetahui selera atau minat warga kota Bandung terhadap jenis film yang paling disukai. Kemudian dipilih beberapa jenis film yang sering

diputar di sebagian besar bioskop yang ada di kota Bandung. Misalnya ada tiga jenis film, yakni film India, film Mandarin dan film Nasional. Pertanyaan yang diajukan adalah : Jenis film manakah yang paling disukai warga kota Bandung? Apakah film India, film Mandarin atau film Nasional? Hipotesis atau praduga dirumuskan sebagai berikut :

- a). Warga kota Bandung lebih menyukai film Nasional daripada film India.
- b). Warga kota Bandung lebih menyukai film India daripada film Mandarin.
- c). Warga kota Bandung lebih menyukai film Mandarin daripada film Nasional.
- d). Warga kota Bandung lebih menyukai film India daripada film Nasional.
- e). Dan seterusnya berdasarkan kemungkinan lainnya.

Untuk menguji manakah hipotesis yang paling betul, kita tidak mungkin mengkaji teori atau argumentasi teoritis, tetapi perlu pengamatan langsung di beberapa gedung bioskop. Misalnya menghitung jumlah karcis yang terjual di sejumlah gedung bioskop pada saat ketiga jenis film tersebut diputar. Langkah selanjutnya , jumlah karcis yang terjual untuk setiap jenis film tersebut dibandingkan. Usaha menghitung jumlah karcis yang terjual ini dilakukan beberapa kali di sejumlah gedung bioskop yang ada di kota Bandung. Pada akhirnya dicari rata-rata jumlah pengunjung untuk ketiga film tersebut, dihitung pula simpangan baku atau deviasi standarnya, lalu diuji perbedaan-perbedaan jumlah pengunjung tersebut melalui cara – cara yang lazim digunakan dalam statistika.

Hasil yang diperoleh dari pengujian tersebut adalah kesimpulan umum mengenai minat warga kota Bandung terhadap jenis film yang disukai diantara tiga jenis film tersebut di atas. Kesimpulan tersebut semata-mata hanya didasarkan atas hasil analisis data tanpa didukung oleh penalaran

teoritis. Demikian juga hipotesis tidak diturunkan dari teori keilmuan. Oleh sebab itu, kesimpulan berpikir induktif masih harus dipertanyakan. Ada semacam kecenderungan kebenaran hasil analisis data dikaitkan dengan teori ilmiah hanya sekedar untuk membenarkan kesimpulan deduktif.

B. Berpikir Ilmiah

Ilmu adalah pengetahuan yang telah teruji kebenarannya melalui metode ilmiah, oleh sebab itu ilmu pada hakekatnya adalah pengetahuan ilmiah. Seorang ilmuwan dituntut memiliki sifat-sifat terbuka, jujur, teliti, kritis, tidak mudah percaya tanpa adanya bukti-bukti, tidak cepat putus asa dan tidak cepat puas dengan hasil karyanya untuk dapat menghasilkan ilmu pengetahuan harus melalui proses berpikir ilmiah.

Berpikir ilmiah adalah menggabungkan berpikir deduktif (rasional) dengan berpikir induktif (emperis). Proses berpikir ilmiah mengikuti langkah-langkah tertentu yang disangga oleh tiga unsur pokok, yakni pengajuan masalah, perumusan hipotesis dan verifikasi data (Nana Sudjana: 2009). Melalui proses berpikir rasional (deduktif) menghasilkan hipotesis, sedangkan hipotesis diuji kebenarannya secara emperis (induktif) dengan menggunakan fakta-fakta. Pengujian seperti tersebut di atas disebut metode logiko – hipoteko – verifikatif yang menuntun kita kepada cara-cara berpikir untuk menghasilkan pengetahuan yang bersifat ilmiah.

Apabila hipotesis tidak teruji kebenarannya, tetap harus disimpulkan dengan memberikan pertimbangan dan penjelasan faktor penyebabnya. Menurut Nana Sudjana (2009) penyebab yang paling utama, yakni (a) kesalahan verifikasi data seperti instrumen kurang tepat, sumber datanya keliru, teknis analisis data yang

digunakan tidak memenuhi syarat dan (b) kurang tajam dalam menurunkan hipotesis atau teorinya kedaluarsa. Apabila proses penurunan hipotesis telah dipenuhi dan verifikasi data telah memenuhi persyaratan, hipotesis tetap tidak terbukti kebenarannya, dapat disimpulkan: tidak terdapat bukti-bukti yang kuat bahwa teori yang mendukung hipotesis dapat diaplikasikan dalam kondisi dan di tempat penelitian tersebut dilaksanakan. Tidak berarti teori harus disalahkan.

Berpikir rasional untuk menurunkan hipotesis, dilanjutkan dengan berpikir secara empiris untuk membuktikan kebenaran hipotesis, adalah tonggak utama dalam berpikir ilmiah. Sifat analisis dalam berpikir rasional diikuti oleh sintesis dalam pengujian hipotesis. Berpikir deduktif diikuti oleh berpikir induktif. Teori dibuktikan oleh fakta. Rasio diikuti oleh pengamatan pancaindra. Berpikir ilmiah mengarahkan kita kepada metode ilmiah, yakni metode untuk mendapatkan pengetahuan ilmiah, atau metode logiko – hipoteko – verifikasi. Wujud rasional dari metode ini adalah penelitian ilmiah

C. Hakikat Matematika

Banyak definisi yang dikemukakan oleh para pakar matematika seperti : Johnson dan Rissing (1972), Moris Kline (1973), James dan James (1976), Reys dkk (1984), serta masih banyak lagi yang lainnya (Ruseffendi, 1993). Masing-masing mempunyai perbedaan dan persamaan. Menerapkan definisi matematika yang eksak terasa agak sulit karena perkembangan matematika itu sendiri dan kegunaannya dalam ilmu-ilmu lain. Dari keseluruhan definisi yang dikemukakan dapat dirangkum sebagai berikut. Pada hakekatnya matematika adalah:

- a. Merupakan aktifitas mental yang mengandung sifat ilmiah.

- b. Merupakan pengetahuan tentang penalaran yang logis, pola pikir, mengenai bentuk, susunan, besaran, konsep-konsep yang saling berhubungan, suatu kunci guna memahami gejala-gejala alam, teknologi, maupun kehidupan sosial masyarakat.
- c. Merupakan suatu cabang ilmu yang eksak yang terorganisir secara sistematis.
- d. Merupakan bagian dari pengetahuan manusia tentang bilangan dan kalkulasi.
- e. merupakan bahasa yang menggunakan istilah yang didefinisikan dengan cermat, jelas dan akurat, representasinya dengan simbol.
- f. Sebagai pelayan dan sekaligus raja dari semua ilmu.

Ciri utama matematika adalah metode dalam penalaran. Metode yang digunakan dalam mencari kebenaran di dalam matematika adalah dengan cara deduksi (Ruseffendi, 1985). Suatu kebenaran matematika dikembangkan berdasarkan alasan-alasan yang logis dengan hipotesis deduktif. Namun cara kerja dari matematika terdiri dari : observasi, intuisi, menguji hipotesis, mencari analog, induksi, menebak, dan bahkan dengan cara coba-coba (*trial and error*). Matematika dimulai dari unsur-unsur yang tidak didefinisikan, berkembang keunsur-unsur yang didefinisikan, terus ke aksioma atau postulat, sampai kepada dalil atau teorema. Rangkaian argumentasi deduktif yang menuju kepada suatu teorema atau formula, disebut dengan pembuktian.

Dalam komunikasi pemikiran keilmuan, matematika memainkan dua peranan penting, yaitu sebagai raja dan sebagai pelayan ilmu (Ruseffendi, 1993). Sebagai raja, matematika merupakan bentuk logika yang paling tinggi. Logika dilukiskan

dalam bentuk sistem simbolik dari kegiatan pemikiran serta struktur yang teratur. Dapat dicermati bahwa betapa rumitnya sistem yang ada di dalam matematika, dari definisi yang satu ke definisi yang lain, aksioma-aksioma dan sifat-sifat yang digabungkan untuk membentuk sistem baru maupun dalam menarik suatu kesimpulan, namun selalu taat azas. Artinya dari satu sistem kesistem lain tidak pernah terdapat kontradiksi. Sebagai pelayan matematika dapat digunakan sebagai alat oleh ilmu-ilmu lain, matematika menyediakan formula bagi ilmu-ilmu lain, bukan saja sistem logika matematikanya tetapi juga model matematis dari berbagai segi kegiatan keilmuan.

Salah satu cabang matematika yang banyak digunakan dalam menarik suatu kesimpulan adalah logika. Matematika dan logika merupakan bidang yang sama, karena

seluruh konsep dan dalil matematika dapat diturunkan dari logika. Bertran Russel (Jujun S. Suryasumantri, 1989) menyatakan bahwa logika telah menjadi bersifat matematis dan matematika menjadi lebih logis. Akibatnya adalah tidak mungkin menarik garis pemisah di antara keduanya, sesungguhnya dua hal tersebut merupakan satu. Mereka berbeda seperti anak dan orang dewasa, logika merupakan masa muda dari matematika dan matematika merupakan masa dewasa dari logika.

Salah satu pola berpikir menggunakan logika matematika adalah dalam menarik suatu kesimpulan. Banyak sekali dalam proses menarik kesimpulan yang sah dari suatu pernyataan matematik dengan menggunakan kaidah-kaidah logika. Kaidah-kaidah tersebut antara lain:

a). *Modus Ponens*

$$\begin{array}{l} p \longrightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

b). *Modus Tollens*

$$\begin{array}{l} p \longrightarrow q \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

c). *Silogisma*

$$\begin{array}{l} p \longrightarrow q \\ q \longrightarrow r \\ \hline \therefore p \longrightarrow r \end{array}$$

Keterangan :

Baris pertama disebut dengan premis mayor.
 Baris kedua disebut dengan premis minor
 Baris ketiga disebut dengan konklusi/kesimpulan. Tanda ” ” merupakan notasi implikasi atau ”jika....maka...”. Tanda ”~” merupakan notasi ingkaran/negasi, dan ~q dibaca bukan q.
 Tanda ”∴” dibaca ”jadi”

Dengan demikian pada pernyataan majemuk *modus ponens* dapat dibaca: Diketahui jika pernyataan p mengakibatkan q. Selanjutnya dalam kondisi lain diketahui p benar, maka dapat disimpulkan q terjadi. Pada pernyataan majemuk *Modus Tollens*

dapat dibaca: Jika p maka q adalah pernyataan yng benar, dan selanjutnya diketahui bukan q, maka kita dapat menarik kesimpulan pastilah bukan p. Pada pernyataan majemuk *Sillogisme* dapat dibaca: Jika diketahui pernyataan p maka q dan q maka r bernilai benar, maka kesimpulannya adalah p mengakibatkan r.

Pernyataan majemuk seperti di atas adalah merupakan *Tautologi* artinya pernyataan yang selalu benar bagaimanapun nilai kebenaran dari masing-masing komponennya, hal ini dapat ditunjukkan melalui tabel kebenaran. Suatu kebenaran matematis adalah bersifat menyeluruh, maksudnya apabila suatu sistem itu dikatakan benar, maka pastilah berlaku

benar untuk setiap komponen yang terkandung di dalamnya. Jika suatu sistem itu dikatakan salah, maka tidak berarti seluruh komponen di dalamnya salah. Prinsip ini analog dengan sistem yang bekerja pada sebuah mesin. Mesin itu dikatakan baik/hidup berarti semua komponen di dalamnya berjalan baik, tetapi jika mesin itu dikatakan rusak bukanlah berarti semua komponennya rusak.

D. Matematika Sebagai Modal dan Model Berpikir Ilmiah

Orang yang belajar matematika melakukan aktivitas mental. Aktifitas mental yang dimaksud adalah cara berpikir atau menalar untuk menguji sah atau tidaknya suatu argumen dengan menggunakan metode penalaran logika deduktif. Melalui penalaran secara logika deduktif inilah suatu kebenaran ilmiah ataupun pengetahuan baru diturunkan dari pengetahuan sebelumnya yang sudah diketahui kebenarannya. Sebagai contoh, misalkan kita mempunyai fakta bahwa suatu kalimat terbuka yang berbentuk $x - 5 = 3$. Kita akan mencari harga x yang memenuhi sehingga kalimat tersebut menjadi pernyataan yang bernilai benar, yaitu nilai x manakah apabila dikurangi 5 menghasilkan 3 ?. Proses yang dilakukan adalah dengan cara menambahkan masing-masing ruas dengan 5 maka diperoleh nilai $x = 8$. Persoalannya bolehkah kita melakukan langkah yang demikian?. Untuk menjawab pertanyaan ini maka kita harus mengacu pada pengetahuan sebelumnya, yaitu suatu sifat menyatakan bahwa suatu persamaan nilainya tak akan berubah jika pada masing-masing ruas ditambahkan dengan bilangan yang sama. Inilah rangkaian argumentasi deduktif, yaitu suatu pikiran rasional yang dapat dijadikan sebagai modal dalam berpikir ilmiah.

Hipotesis yang diturunkan dari teori melalui proses penalaran, proses pembuktian dalam matematika dapat

dilakukan antara lain dengan model pembuktian langsung, pembuktian tak langsung (terbalik), atau dengan induksi matematika.

a). Pembuktian langsung.

Cara ini menggunakan prinsip silogisme sebagai dasar kebenaran pernyataan pertama, berakibat pada kebenaran pernyataan kedua, dan demikian seterusnya. Contoh: Buktikan *ada* benda langit yang tidak bulat.

Solusinya: Asteroid adalah benda langit dan asteroid tidak bulat. Jadi ada benda langit yang tidak bulat. Argumen dari proses pembuktian tersebut adalah sebagai berikut: Dalam hipotesis tersebut termuat kata *ada*, ini berarti kalimat tersebut mengandung kuantor eksistensial. Pada pernyataan berkuantor eksistensial, bukti langsung dilakukan dengan menyebutkan sebuah contoh dari semesta yang menyebabkan pernyataan bernilai benar. Cara lain adalah dengan melakukan substitusi langsung.

Contoh lain adalah: Buktikan bahwa $x^2 \geq x$; untuk setiap $x \in$ bilangan asli.

Solusi: ambil sebarang (secara acak) bilangan asli n , berarti $n \geq 1$

$$\Leftrightarrow n \cdot \frac{n}{n} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{n^2}{n} \geq 1 \Leftrightarrow n^2 \geq n. \quad \text{Oleh}$$

karena n adalah sebarang bilangan asli yang dipilih secara acak, maka n menjelajah/mewakili semua bilangan asli x , maka terbukti $x^2 \geq x$; untuk setiap $x \in$ bilangan asli. Makna sebarang (random) merupakan konsep yang sangat mendasar dalam proses pembuktian matematika yang memuat kuantor universal (kata "setiap"), karena dengan mengambil secara sebarang/acak berarti semua unsur telah terwakili(representatif). Proses random merupakan prinsip dasar sampling dalam melakukan penelitian ilmiah yang akan melakukan generalisasi.

b). Pembuktian tak langsung.

Cara pembuktian tidak langsung menggunakan prinsip *modus tollens* sebagai

dasarnya. Membuktikan sebuah pernyataan berkuantor universal bernilai salah, adalah cukup dengan mengambil contoh menyangkal kebenarannya, sedangkan untuk membuktikan kebenarannya adalah cukup dibuktikan bahwa ingkarannya salah.

Contoh: Buktikan bahwa setiap $x \in$ bilangan asli, $x + 2 \geq 3$

Solusi: Andaikan tidak benar bahwa setiap $x \in$ bilangan asli, $x + 2 \geq 3$ ini berarti bahwa ingkarannya adalah ada bilangan asli x sedemikian sehingga $x + 2 < 3 \Leftrightarrow x < 3 - 2 \Leftrightarrow x < 1$. Karena diketahui bahwa x adalah bilangan asli maka tak mungkin $x < 1$ jadi pengandaian harus diingkar. Kesimpulannya benar berlaku bahwa setiap $x \in$ bilangan asli, berlaku $x + 2 \geq 3$

c). Pembuktian dengan Induksi Lengkap.

Bentuknya adalah sebagai berikut: Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jika (1) $P(1)$ benar ; (2) Jika $P(k)$ berakibat $P(k+1)$ benar ; maka $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$

Dalam ilmu sosial berlaku bahwa prilaku (*behavior*) dapat dipengaruhi oleh watak dan lingkungan. Secara matematis pernyataan ini dapat dapat dirumuskan ke dalam fungsi matematis dua variabel yaitu, $P = f(w, l)$, yang mana P = prilaku; w = watak bawaan; l = lingkungan. Seberapa kuat adanya pengaruh watak bawaan dan seberapa kuat pengaruh lingkungan masing-masing dapat dikuantifikasi dengan suatu konstanta a untuk watak dan b untuk lingkungan. Selanjutnya formulasi untuk prinsip tentang prilaku dapat dinyatakan sebagai persamaan linier:

$P = a w + b l$, model ini nantinya berkembang menjadi regresi linier $Y = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2$

Berpikir matematis adalah berpikir dengan menggunakan logika deduktif dan induktif, maupun analogi. Menalar secara induksi dan analogi menggunakan pengamatan dan bahkan percobaan untuk

memperoleh fakta yang dapat dipakai sebagai dasar argumentasi untuk menarik kesimpulan, tetapi harus disadari bahwa pancaindra kita terbatas dan tak teliti. Sebagai contoh misalnya: Melalui pengamatan kita bahwa 3 adalah bilangan ganjil dan prima, begitu juga 5, 7, 11, 13, 17 dan yang lainnya. Harus sangat hati-hati kita menyimpulkan bahwa bilangan prima adalah bilangan ganjil atau bilangan ganjil adalah prima. Inilah bahaya dari proses induksi maupun analogi. Model matematika mempergunakan induksi lengkap untuk memberikan jaminan kebenaran dari kesimpulan yang diperoleh, namun bagaimana halnya dengan penerapan dalam bidang penelitian? Untuk itu matematika dapat memberikan model untuk mengatasi kelemahan tersebut.

Dalam proses pembuktian hipotesis, menggunakan pola pikir induktif. Ini berarti harus dicari fakta-fakta empiris untuk mendukung hipotesis yang diajukan. Sampel yang digunakan untuk mendukung fakta harus diambil secara acak sehingga dapat melakukan generalisasi. Beberapa teknik statistika mensyaratkan adanya asumsi sampel diambil secara acak. Selanjutnya juga melakukan pengukuran terhadap atribut-atribut dari sampel. Setiap pengukuran pasti mengandung kesalahan. Untuk mengatasi semua persoalan ini, maka matematika memperkenalkan teori peluang, sehingga setiap penarikan kesimpulan disertai dengan peluang kesalahan sebagai akibat kesalahan sampling, pengukuran atau yang lainnya. Selanjutnya dalam penelitian ini dikenal dengan taraf signifikansi penerimaan atau penolakan hipotesis.

Secara konvensional apabila kita menyelesaikan soal-soal matematika, maka disarankan melakukan langkah-langkah sebagai berikut:

- **Diketahui:**.....
- **Tentukan / Hitung / Buktikan:**

- **Jawaban / Hitungan / Bukti**

Dari ketiga langkah pokok di atas, hal ini sejalan dengan kerangka berpikir ilmiah, yaitu logiko – hipotetiko – verifikasi.

a). Pada langkah **Diketahui** :....., kita akan mengumpulkan semua fakta pendukung yang

diketahui, serta pengetahuan sebelumnya yang diketahui benar (logiko)

b). Pada langkah **Tentukan / Hitung / Buktikan**:, ini merupakan suatu hipotesis yang

diturunkan dari suatu penalaran logis secara deduktif, yang merupakan dugaan sementara. Tentu saja hal ini harus dibuktikan pada langkah selanjutnya.

c). Pada Langkah **Jawaban / Hitungan / Bukti** :, ini merupakan langkah-langkah mencari jawab,

melakukan perhitungan, atau melakukan pembuktian melalui proses antara lain mencari pola, menghitung, mengukur, sintesa, analisa substitusi, induksi, analogi, trial and error, bahkan menebak.

Sebagai contoh misalnya kita akan menyelidiki kebenaran dari argumen berikut: Semua manusia akan mati. Sokrates adalah manusia, karena itu Sokrates akan mati. Langkah-langkah menjawab adalah: Diketahui : (1) Semua manusia akan mati; (2) Sokrates adalah manusia. Buktikan : Sokrates akan mati. Bukti : Misalkan $p =$ manusia; $q =$ mati, dengan demikian kalimat majemuk di atas dapat dinyatakan sebagai model matematis:

Jika semua manusia akan mati	:	$(p \rightarrow q)$
Sedangkan Sokrates adalah manusia	:	Sokrates $\in p$

Maka dapat disimpulkan Sokrates akan mati	∴	p

Ternyata bentuk pernyataan majemuk di atas setelah dibuat ke dalam model matematis analog dengan modus ponens, sehingga argumennya benar. Pernyataan pada soal di atas, menyiratkan makna bahwa siapapun dia, asalkan dia manusia maka pasti dia akan mati. Tak bisa kita menyimpulkan, kalau sesuatu itu bukan manusia maka pasti tidak akan mati, tetapi yang pasti benar adalah: Jika ia tidak akan mati maka pastilah itu bukan manusia.

KESIMPULAN DAN SARAN

Dari hasil pembahasan di atas, maka dapat disimpulkan bahwa: Pola pikir dalam matematika yang merupakan penalaran logis, melalui proses kerja deduksi, induksi, analogi, menghitung, mengukur, *trial and error*, mencari pola, bahkan menebak, dapat dijadikan modal dalam berpikir ilmiah. Bahkan bahasa

simbolik yang digunakan dapat menyederhanakan permasalahan sehingga menghemat intelektual, konsisten dan taat asas. Karakteristik tersebut sangat menunjang kemampuan untuk berpikir ilmiah.

Model berpikir ilmiah dalam matematika dapat direfleksikan dalam memecahkan masalah, dengan mengambil model langkah-langkah sebagai berikut:

~ Diketahui....., hal ini adalah merupakan sesuatu yang dijadikan landasan atau dasar berpikir

~ Hitung / Tentukan / Buktikan:....., hal ini merupakan dugaan atau hipotesis yang diturunkan berdasarkan kajian yang diketahui.

~ Hitungan / Jawaban / Bukti:....., hal ini merupakan verifikasi lewat langkah-langkah atau kajian

yang logis atau melalui suatu induksi matematika untuk menerima atau menolak

dugaan/hipotesis

Ini tidak lain dari pada suatu model kerangka berpikir ilmiah.

DAFTAR PUSTAKA

- Amin, Moh. 1996. *Filsafat, Science, Teknologi dan Manusia*. Yogyakarta: PPS IKIP Yogyakarta
- Andi Hakim Nasution.1982. *Landasan Matematika*. Jakarta: Bratara
- Arikunto, Suharsimi. 2002. *Prosedur Penelitian suatu Pendekatan Praktek*. Jakarta: Rineka Cipta.
- Baker, Stephen F. 1994. *Philosophy of Mathematics*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- Bochenski. 1992. *Philosophy An Introduction*. New York: Harper & Row.
- Depdiknas. 2002. *Pendidikan Kecakapan Hidup*. Jakarta : Depdiknas, Tim Broad Based Education.
- Jujun S Suryasumantri. 1989. *Ilmu dalam Perspektif*. Jakarta: PT Gramedia.
- Nana Sudjana. 2009. *Tuntunan Penyusunan Karya Ilmiah*. Bandung: Sinar Baru Algensindo.
- Poepoprodjo, W., Gilarso T. 1999. *Logika Ilmu Menalar*. Bandung: Remaja Karya.
- Ruseffendi, E.T. dkk. 1993. *Pendidikan Matematika 3, Buku I dan II*. Jakarta: Universitas Terbuka.
- . 1985. *Pengajaran Matematika Modern*. Bandung : Tarsito