SISTEM PERSAMAAN LINEAR DALAM ALJABAR MIN-PLUS INTERVAL

Naysilla Aisha Rizqhta[1], Siswanto[2]

[1,2]Program Studi Matematika/Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam/Universitas Sebelas Maret
Email: [1]*naysillarizqhta13@student.uns.ac.id*
[2]*sis.mipa@staff.uns.ac.id*

ABSTRAK

Aljabar maks-plus merupakan suatu himpunan semua bilangan real $\mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}, \varepsilon = -\infty$, yang dilengkapi dengan dua operasi maksimum ($\oplus$) dan operasi plus ($\otimes$). Dalam aljabar maks-plus dikembangkan penelitian mengenai sistem persamaan linear. Disamping aljabar maks-plus, dikembangkan juga penelitian mengenai aljabar min-plus. Aljabar min-plus merupakan himpunan $\mathbb{R} \cup \{\varepsilon'\}, \varepsilon' = +\infty$. Aljabar min-plus dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{min} = (\mathbb{R}_{\varepsilon'}, \oplus', \otimes)$. Sistem persamaan linear juga dibahas dalam aljabar min-plus. Aljabar min-plus diperluas menjadi aljabar min-plus interval, aljabar min-plus interval adalah himpunan $I(\mathbb{R})_{min}$ yang didefinisikan sebagai $I(\mathbb{R})_{min} = \{x = [\underline{x}, \overline{x}] | \underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}_{min}, \underline{x} \leq \overline{x} < \varepsilon'\} \cup \{[\varepsilon', \varepsilon']\}$. Aljabar min-plus interval dilengkapi dengan operasi $\overline{\oplus'}$ dan $\overline{\otimes}$, untuk setiap $x, y \in I(\mathbb{R})_{min}$ didefinisikan $x \overline{\oplus'} y = [\underline{x} \oplus' \underline{y}, \overline{x} \oplus' \overline{y}]$, dan $x \overline{\otimes} y = [\underline{x} \otimes \underline{y}, \overline{x} \otimes \overline{y}]$. Penelitian ini menggunakan metode penelitian kepustakaan, yakni mengumpulkan berbagai literatur pendukung yang bersumber dari jurnal, artikel yang berhubungan dengan aljabar min-plus. Disamping itu dipelajari juga konsep dasar aljabar min-plus, mempelajari cara menentukan penyelesaian sistem persamaan linear dalam aljabar min-plus, dan mempelajari matriks interval atas aljabar min-plus interval. Dalam penelitian ini akan dibahas mengenai eksistensi dan ketunggalan penyelesaian sistem persamaan linear dalam aljabar min-plus interval.

Kata Kunci: Aljabar Min-Plus Interval, Sistem Persamaan Linear, Eksistensi, Ketunggalan Penyelesaian

ABSTRACT

The max-plus algebra is a set of all real numbers $\mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}, \varepsilon = -\infty$, equipped with two operations, maximum ($\oplus$) and plus ($\otimes$). In max-plus algebra, research has been developed regarding systems of linear equations. In addition to max-plus algebra, research has also been developed regarding min-plus algebra. Min-plus algebra is a set $\mathbb{R} \cup \{\varepsilon'\}$, where $\varepsilon' = +\infty$. Min-plus algebra is denoted by $\mathbb{R}_{min} = (\mathbb{R}_{\varepsilon'}, \oplus', \otimes)$. Systems of linear equations are also discussed in min-plus algebra. Min-plus algebra is extended to min-plus interval algebra, which is a set $I(\mathbb{R})_{min}$ defined as $I(\mathbb{R})_{min} = \{x = [\underline{x}, \overline{x}] | \underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}_{min}, \underline{x} \leq \overline{x} < \varepsilon'\} \cup \{[\varepsilon', \varepsilon']\}$. The min-plus interval algebra is equipped with operations $\overline{\oplus'}$ and $\overline{\otimes}$, for every $x, y \in I(\mathbb{R})_{min}$ defined as $x \overline{\oplus'} y = [\underline{x} \oplus' \underline{y}, \overline{x} \oplus' \overline{y}]$, and $x \overline{\otimes} y = [\underline{x} \otimes \underline{y}, \overline{x} \otimes \overline{y}]$. This study uses the literature research method, which collects various supporting literature from journals and articles related to min-plus algebra. In addition, it also studies the basic concepts of min-plus algebra, learns how to determine the solutions of systems of linear equations in min-plus algebra, and studies interval matrices over min-plus interval algebra. This research will discuss the existence and uniqueness of solutions of systems of linear equations in min-plus interval algebra.

***Keywords**: Min-Plus Algebra Interval, Linear Equation Systems, Existence, Uniqueness of Solutions*

PENDAHULUAN

Aljabar min-plus atas $\mathbb{R}$ merupakan himpunan $\mathbb{R}_{\varepsilon\prime}$ yang dilengkapi dengan operasi minimum dan operasi penjumlahan yang dinotasikan dengan $\oplus'$ dan $\otimes$ dalam penelitian yang dibahas oleh Watanabe dan Watanabe [7]. Dalam aljabar min-plus dipelajari juga matriks atas aljabar min-plus. Matriks atas aljabar min-plus juga dibahas oleh Watanabe dan Watanabe [7], notasi $\mathbb{R}_{\varepsilon\prime}^{m\times n}, m \in M, n \in N$ sebagai himpunan semua matriks berukuran $m \times n$ dengan entri-entri elemen $\mathbb{R}_{\varepsilon\prime}$.

Aljabar min-plus juga membahas mengenai sistem persamaan linear, penyelesaian sistem persamaan linear $A \otimes x = b$ dengan matriks $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_{\varepsilon\prime}^{m\times n}$ dan $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}_{\varepsilon\prime}^{m}$ seperti yang dibahas oleh Musthofa [5].

Aljabar min-plus diperluas menjadi aljabar min-plus interval yang dibahas dalam penelitian yang dilakukan oleh Awallia [1], himpunan $I(\mathbb{R})_{min}$ yang didefinisikan $I(\mathbb{R})_{min} = \{x = [\underline{x}, \overline{x}] | \underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}_{min}, \underline{x} \leq \overline{x} < \varepsilon'\} \cup \{[\varepsilon', \varepsilon']\}$. Aljabar min-plus interval dilengkapi dengan operasi $\overline{\oplus'}$ dan $\overline{\otimes}$.

Pada penelitian Umar [6], aljabar min-plus interval dibahas juga matriks atas aljabar min-plus interval. Matriks atas aljabar min-plus interval yang didefinisikan $I(\mathbb{R})_{min}^{m\times m} \coloneqq \{A = (A_{ij}) | A_{ij} \in I(\mathbb{R})_{min},$ untuk $i = \{1,2, \dots, m\}, j = \{1,2, \dots, n\}$. Dalam penelitian Fauziah [3] dibahas mengenai eksistensi dan ketunggalan penyelesaian sistem persamaan linear dalam aljabar min-plus. Penelitian ini akan membahas mengenai eksistensi dan ketunggalan penyelesaian sistem persamaan linear yang akan diimplementasikan dalam aljabar min-plus interval dengan menganalisis dan melakukan eksperimen pada persamaan dalam aljabar min-plus.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research*) atau kajian pustaka, yakni mengumpulkan berbagai literatur pendukung yang bersumber dari artikel, jurnal, dan lainnya yang berhubungan dengan konsep dasar aljabar min-plus, mempelajari cara menentukan penyelesaian sistem persamaan linear dalam aljabar min-plus, dan mempelajari matriks interval atas aljabar min-plus interval. Sehingga akan didapatkan eksistensi dan ketunggalan penyelesaian sistem persamaan linear dalam aljabar min-plus interval.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Untuk menemukan sistem persamaan linear dalam ajabar min-plus interval dapat mengikuti metode dalam penelitian Fauziah [3] mengenai sistem persamaan linear dalam aljabar min-plus.

Diberikan sistem persamaan sebagai berikut

$$A \otimes x = b$$

dengan matriks $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_{\varepsilon'}^{m \times n}$ dan $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}_{\varepsilon'}^{m}$.

Dalam operasi minimum ($\oplus'$) dan operasi penjumlahan ($\otimes$) pada matriks dan vektor dalam aljabar min-plus diterapkan dengan cara yang sama pada aljabar linear konvesional. Oleh karena itu, dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, i \in M$$

$$\begin{bmatrix} (a_{11} \otimes x_1) \oplus' (a_{12} \otimes x_2) \oplus' \cdots \oplus' (a_{1j} \otimes x_j) \\ (a_{21} \otimes x_1) \oplus' (a_{22} \otimes x_2) \oplus' \cdots \oplus' (a_{2j} \otimes x_j) \\ \vdots \\ (a_{i1} \otimes x_1) \oplus' (a_{i2} \otimes x_2) \oplus' \cdots \oplus' (a_{ij} \otimes x_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, i \in M.$$

Oleh karena itu, untuk $i \in M, j \in N, M = \{1, \dots, m\}$, dan $N = \{1, \dots, n\}$ sistem persamaan linear dapat ditulis

$$\oplus'^{n}_{j=1} \left(a_{ij} \otimes x_j\right) = b_i$$

$$min_{j=1,\dots,n}\left(a_{ij} + x_j\right) = b_i.$$

Selanjutnya dilakukan pengurangan b_i pada kedua sisi maka sistem persamaan menjadi

$$min_{j=1,\dots,n}\left(a_{ij} - b_i + x_j\right) = 0.$$

Misalkan matriks $\overline{A} = \left(\overline{a}_{ij}\right) = (a_{ij} - b_i)$, kemudian didapatkan sistem persamaan baru dimana sisi kanan sistem sama dengan 0, yaitu

$$\overline{A} \otimes x = 0.$$

Kemudian dapat dikatakan bahwa sistem dinormalisasi dan proses ini disebut normalisasi. Jika diberikan matriks diagonal B

$$B = diag(-b_1, -b_2, \dots, -b_m) = \begin{pmatrix} -b_1 & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon' \\ \varepsilon' & -b_2 & \varepsilon' & \varepsilon' \\ \varepsilon' & \varepsilon' & \ddots & \varepsilon' \\ \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon' & -b_m \end{pmatrix},$$

Maka didapatkan

$$\overline{A} \otimes x = B \otimes A \otimes x = 0.$$

Oleh karena itu, dapat diketahui bahwa $\overline{A} \otimes x$ ekuivalen dengan $B \otimes A \otimes x$ dan diperoleh matriks $\overline{A} = B \otimes A$.

Selanjutnya jika diberikan suatu sistem $A \overline{\otimes} x = b$ dengan $A = (a_{ij}) \in I(\mathbb{R})_{\varepsilon'}^{m\times n}, b = (b_1, \dots, b_m) \in I(\mathbb{R})_{\varepsilon'}^{m}, N = \{1, \dots, n\}$, dan $M = \{1, \dots, m\}$. Maka dapat dijelaskan beberapa definisi sebagai berikut

Definisi 1. *Diberikan sistem persamaan* $A \overline{\otimes} x = b$ *dimana* $A \in I(\mathbb{R})_{\varepsilon'}^{m\times n}$ *dan* $b \in I(\mathbb{R})_{\varepsilon'}^{m}$, *didefinisikan* $S(A, b) = \{x \in I(\mathbb{R})_{\varepsilon'}^{m} | \underline{A} \otimes \underline{x} = \underline{b}\, , \overline{A} \otimes \overline{x} = \overline{b}\}$

Definisi 2. *Diberikan sistem persamaan* $A \overline{\otimes} x = b$ *dimana* $A \in I(\mathbb{R})_{\varepsilon'}^{m\times n}$ *dan* $b \in I(\mathbb{R})_{\varepsilon'}^{m}$, $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$, $b \approx [\underline{b}, \overline{b}]$, $M = \{1,2, \dots, m\}$, *dan* $N = \{1,2, \dots, n\}$ *didefinisikan*

i. $S(A, b) = \{x \in I(\mathbb{R})_{\varepsilon'}^{m} | x \approx [\underline{x}, \overline{x}] \ni \underline{x} \in S(\underline{A}, \underline{b}), \overline{x} \in S(\overline{A}, \overline{b})\}\, , \forall j \in N$

ii. $\overline{\hat{x}} = (\overline{\widehat{x_1}}, \overline{\widehat{x_2}}, \dots, \overline{\widehat{x_n}}) \in I(\mathbb{R})_{\varepsilon'}^{n}$, *dengan* $\overline{\widehat{x_j}} = -min_{i\in M}(\overline{A_{ij}} - \overline{b_i}), \forall j \in N$ *dan*

$\underline{\hat{x}} = (\underline{\widehat{x_1}}, \underline{\widehat{x_2}}, \dots, \underline{\widehat{x_n}}) \in I(\mathbb{R})_{\varepsilon'}^{n}$, *dengan* $\underline{\widehat{x_j}} = -min_{i\in M}(\underline{A_{ij}} - \underline{b_i}), \forall j \in N$.

Sebagian besar sistem persamaan linear menggunakan matriks dengan setidaknya satu entri berhingga di setiap baris atau kolom. Sehingga bisa dijelaskan dalam definisi berikut.

Definisi 3. *Diberikan matriks* $A \in I(\mathbb{R})_{\varepsilon'}^{m\times n}$, *dengan* $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$ *matriks* $I(\mathbb{R})$*-astik ganda jika dan hanya jika* $\underline{A}$ *matriks* $\mathbb{R}$*-astik ganda.*

Teorema 1. $x \in S(A, b)$ *jika dan hanya jika*

i). $x \geq \hat{x}$ *dan*

ii). $\cup_{j\in N_{\underline{x}}} M_j(\underline{A}, \underline{b}) = M$ *dimana* $N_{\underline{x}} = \{j \in N | \underline{x}_j = \underline{\hat{x}}_j\}$ *dan* $\cup_{j\in N_{\overline{x}}} M_j(\overline{A}, \overline{b}) = M$ *dimana* $N_{\overline{x}} = \{j \in N | \overline{x}_j = \overline{\hat{x}}_j\}$.

Berdasarkan Teorema 1. muncul dua akibat, yaitu tentang eksistensi dan ketunggalan penyelesaian.

Akibat 1. *Diketahui* $A \in I(\mathbb{R})_{\varepsilon'}^{m\times n}$ *matriks* $I(\mathbb{R})$*-astik ganda dan* $b \in I(\mathbb{R})^{m}$, *tiga pernyataan berikut ekuivalen*

i). $S(A, b) \neq \emptyset$,

ii). $\overline{x} \in S(A, b)$,

iii). $\cup_{j\in N} M_j(\underline{A}, \underline{b}) = M$ *dan* $\cup_{j\in N} M_j(\overline{A}, \overline{b}) = M$.

Akibat 2. *Diketahui* $A \in I(\mathbb{R})_{\varepsilon'}^{m\times n}$ *matriks* $I(\mathbb{R})$*-astik ganda,* $b \in I(\mathbb{R})^{m}$*dan* $x = [\underline{x}, \overline{x}]$. *Himpunan* $S(A, b) = \{\overline{x}\}$ *jika dan hanya jika*

i). $\cup_{j\in N} M_j(\underline{A}, \underline{b}) = M$ *dan* $\cup_{j\in N} M_j(\overline{A}, \overline{b}) = M$, *ii).* $\cup_{j\in N'} M_j(\underline{A},\underline{b}) \neq M$ *untuk setiap* $N' \subseteq N, N' \neq N$ *dan* $\cup_{j\in N''} M_j(\overline{A},\overline{b}) = M$ *untuk setiap* $N'' \subseteq N, N'' \neq N$.

Contoh :

Diberikan sistem persamaan linear

$$\begin{bmatrix} [1,2] & [2,4] & [3,5] \\ [-1,0] & [4,5] & [2,4] \\ [6,8] & [0,3] & [3,6] \end{bmatrix} \overline{\otimes}\, x = \begin{bmatrix} [4,6] \\ [5,6] \\ [6,9] \end{bmatrix}$$

Misalkan $A = \begin{bmatrix} [1,2] & [2,4] & [3,5] \\ [-1,0] & [4,5] & [2,4] \\ [6,8] & [0,3] & [3,6] \end{bmatrix}, x \approx [\underline{x}, \overline{x}] = \left[\begin{bmatrix} \underline{x_1} \\ \underline{x_2} \\ \underline{x_3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \overline{x_3} \end{bmatrix}\right]$ *dan* $b = \begin{bmatrix} [4,6] \\ [5,6] \\ [6,9] \end{bmatrix}$.

Sistem persamaan linear tersebut memiliki 2 penyelesaian sebagai berikut,

i. *Misalkan* $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ *dan* $\underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$. *Ambil matriks* $\underline{B} = \begin{bmatrix} -4 & \varepsilon' & \varepsilon' \\ \varepsilon' & -5 & \varepsilon' \\ \varepsilon' & \varepsilon' & -6 \end{bmatrix}$.

Sehingga didapat $\underline{B} \otimes \underline{A} = \begin{bmatrix} -4 & \varepsilon' & \varepsilon' \\ \varepsilon' & -5 & \varepsilon' \\ \varepsilon' & \varepsilon' & -6 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -6 & -1 & -3 \\ 0 & -6 & -3 \end{bmatrix}$

dan $\underline{B} \otimes \underline{b} = \begin{bmatrix} -4 & \varepsilon' & \varepsilon' \\ \varepsilon' & -5 & \varepsilon' \\ \varepsilon' & \varepsilon' & -6 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

diperoleh SPL yang dinormalisasi, yaitu

$$[\underline{B} \otimes \underline{A}]\underline{x} = \underline{B} \otimes \underline{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -6 & -1 & -3 \\ 0 & -6 & -3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \underline{x_1} \\ \underline{x_2} \\ \underline{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

SPL yang dinormalisasi memiliki tiga persamaan, yaitu

- $min\left\{-3 + \underline{x_1}, -2 + \underline{x_2}, -1 + \underline{x_3}\right\} = 0$
- $min\left\{-6 + \underline{x_1}, -1 + \underline{x_2}, -3 + \underline{x_3}\right\} = 0$
- $min\left\{\underline{x_1}, -6 + \underline{x_2}, -3 + \underline{x_3}\right\} = 0$

dari persamaan diatas, dimisalkan $(\underline{x_1}, \underline{x_2}, \underline{x_3})$ *merupakan solusi dari permasalahan tersebut, maka didapat*

- $-3 + \underline{x_1} \geq 0, -2 + \underline{x_2} \geq 0, -1 + \underline{x_3} \geq 0$

  $\underline{x_1} \geq 3, \underline{x_2} \geq 2, \underline{x_3} \geq 3$
- $-6 + \underline{x_1} \geq 0, -1 + \underline{x_2} \geq 0, -3 + \underline{x_3} \geq 0$

  $\underline{x_1} \geq 6, \underline{x_2} \geq 1, \underline{x_3} \geq 3$
- $\underline{x_1} \geq 0, -6 + \underline{x_2} \geq 0, -3 + \underline{x_3} \geq 0$

$\underline{x_1} \geq 0, \underline{x_2} \geq 6, \underline{x_3} \geq 3$

Dari tiga persamaan diatas, hitung $\underline{x_1}, \underline{x_2}, \underline{x_3}$ *agar bisa memenuhi syarat*

$$\underline{x_1} \geq 3, \underline{x_1} \geq 6, \underline{x_1} \geq 0$$

Oleh karena itu, $\underline{x_1} \geq maks(3,6,0) = -\,min(-3, -6, 0) = \underline{\widehat{x_1}}$

maka didapat solusi $\underline{x_1} = -6$

$$\underline{x_2} \geq 2, \underline{x_2} \geq 1, \underline{x_2} \geq 6$$

Oleh karena itu, $\underline{x_2} \geq maks(2, 1, 6) = -\,min(-2, -1, -6) = \underline{\widehat{x_2}}$

maka didapat solusi $\underline{x_2} = -6$

$$\underline{x_3} \geq 1, \underline{x_3} \geq 3, \underline{x_3} \geq 3$$

Oleh karena itu, $\underline{x_3} \geq maks(1, 3, 3) = -\,min(-1, -3, -3) = \underline{\widehat{x_3}}$

maka didapat solusi $\underline{x_3} = -3$

Sehingga untuk SPL aljabar min-plus interval $\begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -6 & -1 & -3 \\ 0 & -6 & -3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \underline{x_1} \\ \underline{x_2} \\ \underline{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ *didapat penyelesaian tunggal* $\begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix}$.

ii. *Misalkan* $\overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \\ 8 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ *dan* $\overline{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$. *Ambil matriks* $\overline{B} = \begin{bmatrix} -6 & \varepsilon' & \varepsilon' \\ \varepsilon' & -6 & \varepsilon' \\ \varepsilon' & \varepsilon' & -9 \end{bmatrix}$.

Sehingga didapat $\overline{B} \otimes \overline{A} = \begin{bmatrix} -6 & \varepsilon' & \varepsilon' \\ \varepsilon' & -6 & \varepsilon' \\ \varepsilon' & \varepsilon' & -9 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \\ 8 & 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -1 \\ -6 & -1 & -2 \\ -1 & -6 & -3 \end{bmatrix}$

dan $\overline{B} \otimes \overline{b} = \begin{bmatrix} -6 & \varepsilon' & \varepsilon' \\ \varepsilon' & -6 & \varepsilon' \\ \varepsilon' & \varepsilon' & -9 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

diperoleh SPL yang dinormalkan, yaitu

$$\left[\overline{B} \otimes \overline{A}\right] \overline{x} = \overline{B} \otimes \overline{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & -2 & -1 \\ -6 & -1 & -2 \\ -1 & -6 & -3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \overline{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

SPL yang dinormalkan memiliki tiga persamaan, yaitu

- $min\{-4 + \overline{x_1}, -2 + \overline{x_2}, -1 + \overline{x_3}\} = 0$
- $min\{-6 + \overline{x_1}, -1 + \overline{x_2}, -2 + \overline{x_3}\} = 0$
- $min\{-1 + \overline{x_1}, -6 + \overline{x_2}, -3 + \overline{x_3}\} = 0$

dari persamaan diatas, dimisalkan $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3})$ *merupakan solusi dari permasalahan tersebut, maka didapat*

- $-4 + \overline{x_1} \geq 0, -2 + \overline{x_2} \geq 0, -1 + \overline{x_3} \geq 0$
  $\overline{x_1} \geq 4, \overline{x_2} \geq 2, \overline{x_3} \geq 1$
- $-6 + \overline{x_1} \geq 0, -1 + \overline{x_2} \geq 0, -2 + \overline{x_3} \geq 0$
  $\overline{x_1} \geq 6, \overline{x_2} \geq 1, \overline{x_3} \geq 2$
- $-1 + \overline{x_1} \geq 0, -6 + \overline{x_2} \geq 0, -3 + \overline{x_3} \geq 0$
  $\overline{x_1} \geq 1, \overline{x_2} \geq 6, \overline{x_3} \geq 3$

Dari tiga persamaan diatas, hitung $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}$ *agar bisa memenuhi syarat*

$$\overline{x_1} \geq 4, \overline{x_1} \geq 6, \overline{x_1} \geq 1$$

Oleh karena itu, $\overline{x_1} \geq maks(4, 6, 1) = -min(-4, -6, -1) = \widehat{\overline{x_1}}$

maka didapat solusi $\overline{x_1} = -6$

$$\overline{x_2} \geq 2, \overline{x_2} \geq 1, \overline{x_2} \geq 6$$

Oleh karena itu, $\overline{x_2} \geq maks(2, 1, 6) = -min(-2, -1, -6) = \widehat{\overline{x_2}}$

maka didapat solusi $\overline{x_2} = -6$

$$\overline{x_3} \geq 1, \overline{x_3} \geq 2, \overline{x_3} \geq 3$$

Oleh karena itu, $\overline{x_3} \geq maks(1, 2, 3) = -min(-1, -2, -3) = \widehat{\overline{x_3}}$

maka didapat solusi $\overline{x_3} = -3$

Sehingga untuk SPL aljabar min-plus interval $\begin{bmatrix} -4 & -2 & -1 \\ -6 & -1 & -2 \\ -1 & -6 & -3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \overline{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$

didapat penyelesaian tunggal $\begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix}$

Jadi, sistem persamaan linear

$$\begin{bmatrix} [1,2] & [2,4] & [3,5] \\ [-1,0] & [4,5] & [2,4] \\ [6,8] & [0,3] & [3,6] \end{bmatrix} \overline{\otimes}\, x = \begin{bmatrix} [4,6] \\ [5,6] \\ [6,9] \end{bmatrix}$$

mempunyai penyelesaian tunggal yaitu $x = \begin{bmatrix} [-6,-6] \\ [-6,-6] \\ [-3,-3] \end{bmatrix}$.

KESIMPULAN DAN SARAN

Hasil dan pembahasan menunjukkan bahwa terdapat solusi aljabar min-plus interval untuk menyelesaikan sistem persamaan linear.

DAFTAR PUSTAKA

Awallia, A.R. (2020). *Interval min-plus algebraic structure and matrices over interval min-plus algebra*. *Journal of Physics: Conference Series, 1-8.*

Bacelli, F., Cohen, G., Olsder, G.J., & Quadrat, J.P. (2001). *Synchronization and Linearity, Algebra for Discrete Event Systems.* New York: John Wiley & Sons.

Fauziah, H. (2023). *Eksistensi dan Ketunggalan Penyelesaian Sistem Persamaan Linear dalam Aljabar Min-Plus.* Universitas Sebelas Maret, Surakarta.

Tam, K.P. (2010). *Optimizing and Approximating Eigenvector in Max Algebra.* A Thesis Submitted to the University of Birmingham for The Degree of Doctor of Philosophy (PHD), UK.

Musthofa. (2011). *Sistem Persamaan Linear pada Aljabar Min-Plus.* Prosiding Seminar Nasional Penelitian Pendidikan dan Penerapan MIPA (pp. 1-9).

Umar, M. (2014). *Matriks Interval atas Aljabar Min-Plus.* Doctoral dissertation, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

Watanabe, S., and Watanabe, Y. (2014). *Min-Plus Algebra and Network*. Research Institute of Mathematical Sciences Kyoto University, (pp. 41-45).